NOTAS DE GEOMETRIA

Carlos A. A. Florentino

Março 2018

Conteúdo

Parte 1. As Geometrias Clássicas 5

Capítulo 1. Geometria Euclideana no Plano 7
1.1. Plano Euclideano/Cartesiano 7
1.2. Rectas no plano 9
1.3. Polígonos 12
1.4. Cónicas e sua classificação 13
1.5. Isometrias do Plano 18
1.6. Semelhanças e outras transformações no Plano 24
1.7. Problemas 27

Capítulo 2. Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica 29
2.1. Rectas e distâncias na esfera 29
2.2. Isometrias da esfera 33
2.3. Projecção estereográfica e coordenadas complexas 35
2.4. Transformações de Möbius 37
2.5. O Plano Hiperbólico 41
2.6. Isometrias do Plano Hiperbólico 42
2.7. Comparação entre as geometrias clássicas 44
Apêndice 44
2.8. Problemas 46

Capítulo 3. Geometria Projectiva 47
3.1. O plano projectivo real 47
3.2. Espaços projectivos em geral 49
3.3. Projectividades 51
3.4. Projectividades e transformações de Möbius 53
3.5. Problemas 55

Parte 2. Introdução à Geometria Diferencial 57

Capítulo 4. Curvas no plano e no espaço 59
4.1. Caminhos em $\mathbb{R}^n$ 59
4.2. Curvas e parametrizações 62
4.3. Curvas no Plano 65
4.4. Curvas no Espaço 69
4.5. Apêndice: Curvatura total de curvas fechadas 72
4.6. Problemas 73

Capítulo 5. Superfícies em $\mathbb{R}^3$ 77
5.1. Mapas regulares 77
5.2. Superfícies regulares 79
5.3. As formas fundamentais de um mapa 81
5.4. Métrica e Curvatura 83
5.5. Isometrias e o Teorema de Gauss 88

5.6. O método de Cartan 88
5.7. Curvatura total e o teorema de Gauss-Bonnet 92
5.8. Curvas Geodésicas 93
5.9. Problemas 93

Índice 97

Bibliografia 99

Parte 1

As Geometrias Clássicas

Nesta primeira parte, vamos estudar alguns aspectos elementares das chamadas geometrias clássicas: Euclideana, Esférica, Hiperbólica e Projectiva. Vamos considerar apenas geometrias bidimensionais, por serem muito mais simples que as de maior dimensão, sendo já suficientemente ricas para fornecer as ideias geométricas fundamentais em vários contextos mais gerais.

CAPíTULO 1

Geometria Euclideana no Plano

Começamos com algumas noções básicas de geometria Euclideana no plano. A abordagem clássica à geometria Euclideana é pela via axiomática. Esta tem a vantagem de ser auto-contida e de fornecer um excelente exemplo de como funciona o raciocínio dedutivo matemático por via do encadeamento de *Teoremas*, e a partir dos chamados *Axiomas*.

No entanto, de modo a chegar a exemplos e aplicações interessantes da geometria Euclideana, acaba por ser vantajoso usar o modelo introduzido por Descartes em que o plano Euclideano aparece, logo de início, apetrechado com coordenadas: as coordenadas cartesianas no plano. Esta abordagem, cujo sucesso deu origem à chamada *Geometria Analítica*, permite trabalhar os conceitos geométricos com as ferramentas da álgebra linear e do cálculo diferencial a várias variáveis, tendo por isso, a vantagem de estar intimamente relacionado com as outras áreas e disciplinas da matemática.

Desta forma, este capítulo podería chamar-se igualmente "Geometria Cartesiana" ou "Geometria Analítica" no plano.

1.1. Plano Euclideano/Cartesiano

Um *plano Euclideano* é um conjunto onde podemos falar de pontos, rectas, triângulos, distâncias, etc, e que verifica os axiomas da geometria plana de Euclides. Como estamos interessados em usar as ferramentas do cálculo vectorial e da álgebra linear, vamos identificá-lo com o *plano Cartesiano*, ou seja, com o espaço vectorial:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Esta identificação de um plano abstracto com o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ pode ser feita através da escolha de uma *origem* e de um *referencial ortonormado*. As propriedades geométricas mais relevantes, por exemplo distâncias entre pontos, ângulos, paralelismo de rectas, etc, serão geralmente independentes destas escolhas.

1.1.1. Vectores, coordenadas e pontos; operações básicas. Como usual, identificamos o **plano Cartesiano** $\mathbb{R}^2$, com pares *ordenados* de números reais:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Léxico Os elementos do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ chamam-se **vectores**, e escrevem-se em negrito: $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, etc. Se $\mathbf{v} = (x, y)$, os reais x e y são as **coordenadas** (cartesianas) de $\mathbf{v}$. A **origem** de $\mathbb{R}^2$ é o **vector nulo** $\mathbf{0} = (0, 0)$, ou seja, o vector com ambas as coordenadas nulas. Quando consideramos $\mathbb{R}^2$ como o *plano Cartesiano*, os seus elementos chamam-se **pontos**, e denotam-se por p, q, etc.

Recordem-se as operações básicas com vectores: a *soma*, a *subtracção*, a *multiplicação de um vector por um escalar*.

Neste modelo vectorial do plano, cada vector, representa um e apenas um **ponto** do plano: o local da sua ponta (seta), uma vez que o vector tem base na origem. Assim, a expressão $p = \mathbf{v} = (-2, 3)$ refere-se ao *ponto* com coordenadas $x = -2$ e $y = 3$, mas igualmente ao *vector* com base na origem e ponta em p.

Léxico Em $\mathbb{R}^2$, o **eixo dos** x (resp. **eixo dos** y) é o conjunto dos pontos com $y = 0$ (resp. $x = 0$). As rectas constituídas por pontos com coordenada y constante são chamadas **horizontais**, e com x constante são **verticais**.

1.1.2. Norma e Distância entre 2 pontos. A noção de *distância* entre dois pontos é uma noção fundamental, baseada no famoso Teorema de Pitágoras.

DEFINIÇÃO 1.1. A **distância** entre os pontos $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$ é

$$d(p_1, p_2) := ||\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|| := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

onde $\mathbf{v}_i = p_i$, $i = 1, 2$ são os vectores que correspondem aos pontos dados.

Note-se que, em conjunto com segmentos de recta horizontais e verticais, os pontos p_1 e p_2 formam um triângulo rectângulo.

Léxico Ao numero não negativo $||\mathbf{v}||$, que representa a distância entre o ponto que corresponde a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{0}$, também se chama **norma** de $\mathbf{v}$. Um vector de norma 1 diz-se **unitário**.

EXERCÍCIO 1.2. Prove que a distância entre 2 pontos *distintos* é sempre positiva.

1.1.3. Coordenadas polares, circunferências e ângulos. Fixemos um ponto no plano $p \in \mathbb{R}^2$. Como sabemos, se considerarmos todos os pontos à distância fixa $r > 0$ de p, obtemos um conjunto chamado a circunferência de raio r, centrada em p.

DEFINIÇÃO 1.3. A **circunferência de raio** $r > 0$ **centrada no ponto** $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto:

$$C_{p_0,r} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

Em particular, a equação da circunferência de raio $r > 0$ centrada na origem é:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

TEOREMA 1.4. *[Coordenadas polares] Qualquer vector do plano é o produto da sua norma por um vector unitário. Mais precisamente,* $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$*, temos a representação polar*

$$\mathbf{v} = ||\mathbf{v}|| (\cos\theta, \sin\theta),$$

para certo $\theta \in \mathbb{R}$*, chamado argumento de* $\mathbf{v}$*.*

A representação polar não é única. De facto, se $\mathbf{v}$ *não é a origem, e* θ *é um argumento de* $\mathbf{v}$*, então* $\theta + 2k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *é também um argumento de* $\mathbf{v}$*, e todos os argumentos deste vector são desta forma.*

DEMONSTRAÇÃO. Usa-se o triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede a norma de $\mathbf{v}$ e os catetos medem $||\mathbf{v}|| \cos\theta$ e $||\mathbf{v}|| \sin\theta$. □

Em particular, temos a **circunferência unitária**, de raio 1 (constituida por vectores unitários):

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$$

COROLÁRIO 1.5. *A circunferência unitária é também dada por*

$$C_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta fazer $||\mathbf{v}|| = 1$ na representação polar de um vector unitário. □

1.1.4. Ângulos e produto interno. Dados dois vectores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, eles definem um ângulo (orientado).

DEFINIÇÃO 1.6. Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, com representação cartesiana $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ e (uma) representação polar $\mathbf{v} = ||\mathbf{v}|| (\cos\theta, \sin\theta)$ e $\mathbf{w} = ||\mathbf{w}|| (\cos\varphi, \sin\varphi)$. O seu **produto interno** é definido por:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

e o **ângulo** (orientado) entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é $\varphi - \theta$.

OBSERVAÇÃO 1.7. Note-se que, tal como o argumento de um vector, o ângulo orientado apenas está definido a menos de um múltiplo de 2π.

PROPOSIÇÃO 1.8. *Sejam* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ *quaisquer.*
(1) O produto interno é simétrico, bilinear, e verifica:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{w}|| \, \cos\theta,$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ *é o (valor absoluto do) ângulo entre* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.
(2) Temos $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{w}||$ *e* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{v}||^2$.
(3) A distância verifica a desigualdade triangular*:* $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$.

DEMONSTRAÇÃO. Consultar um livro de álgebra linear. □

1.2. Rectas no plano

Uma recta é o conjunto dos pontos que ficam a igual distância de dois pontos (distintos) dados. Usando a nossa correspondência entre o plano e o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$, vemos que é o conjunto de pontos dado por um polinómio de grau 1 nas variáveis x e y, ou de forma equivalente, é parametrizado por um vector e um ponto "base".

1.2.1. Parametrizações e equações Cartesianas de rectas. Uma das formas de definir rectas é através da sua *parametrização*:

DEFINIÇÃO 1.9. A **recta** que passa no ponto p e tem **direcção** de $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é o conjunto:

$$p \langle \mathbf{v} \rangle := \{p + t\mathbf{v} : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

OBSERVAÇÃO 1.10. É fácil verificar que $p \langle \mathbf{v} \rangle = p \langle \lambda \mathbf{v} \rangle$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, uma recta L com direcção $\mathbf{v}$ tem *também* a direcção de qualquer múltiplo não nulo de $\mathbf{v}$.

EXERCÍCIO 1.11. Mostre o recíproco da observação anterior. Se $p \langle \mathbf{v} \rangle$ e $p \langle \mathbf{w} \rangle$ não representam a mesma recta, então $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não podem ser vectores múltiplos.

Da mesma forma, na recta $p \langle \mathbf{v} \rangle$ o ponto p não é unicamente determinado. Sendo $p \in \mathbb{R}^2$ e L uma recta, escrevemos $p \in L$ quando o ponto p está contido na recta L.

EXERCÍCIO 1.12. Sejam p, q pontos arbitrários, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Mostre que $q \in p \langle \mathbf{v} \rangle$ se e só se $p \langle \mathbf{v} \rangle = q \langle \mathbf{v} \rangle$.

PROPOSIÇÃO 1.13. *Dados dois pontos distintos* p, q *existe uma única recta que os contém (a ambos). Esta recta é dada por:*

$$p \langle q - p \rangle = \{p + t(q - p) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Claramente, p e q pertencem à recta indicada, escolhendo $t = 0$ e $t = 1$ respectivamente. A unicidade segue do facto que se $p \langle \mathbf{v} \rangle \neq p \langle \mathbf{w} \rangle$ então $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não podem ser múltiplos um do outro (Exercício (1.11)). □

A seguinte proposição é imediata.

PROPOSIÇÃO 1.14. *Seja* $p = (x_0, y_0)$ *e* $\mathbf{v} = (u, v) \neq \mathbf{0}$. *Então* $(x, y) \in p \langle \mathbf{v} \rangle$ *se e só se existe um* $t \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt. \end{cases}$$

Léxico A expressão $p(t) = p + t\mathbf{v}$ ou as duas equações acima designam-se uma **parametrização** da recta $p \langle \mathbf{v} \rangle$. Como vimos, cada recta tem várias parametrizações possíveis, designadas **equivalentes**.

Se eliminarmos a variável t das equações que envolvem x e y obtemos:

$$vx = vx_0 + vut = vx_0 + uy - uy_0. \tag{1}$$

Temos então:

TEOREMA 1.15. *[Equação Cartesiana de uma recta] O conjunto de pontos dados por*

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax + by + c = 0\},$$

onde $(a,b) \neq \mathbf{0}$*, é uma recta no plano; e qualquer recta no plano é representada desta forma, que é única a menos de re-escalamento. Mais precisamente, se* $ax+by+c=0$ *e* $a'x+b'y+c'=0$ *representam a mesma recta, então existe* $\lambda \neq 0$ *tal que* $(a',b',c') = \lambda(a,b,c)$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $p\langle \mathbf{v} \rangle$ uma recta no plano e $(x,y) \in p\langle \mathbf{v} \rangle$, com $\mathbf{v} = (u,v)$ não nulo, a equação (1) mostra que

$$vx - uy + uy_0 - vx_0 = 0,$$

pelo que $(x,y) \in L$, onde a recta L tem coeficientes $a = v$, $b = -u$ e $c = uy_0 - vx_0$. Reciprocamente, seja $(x,y) \in L$ e vamos supor $a \neq 0$. Então, fazendo $t = \frac{y}{a}$, vemos que:

$$\begin{cases} x &= -\frac{c}{a} - bt \\ y &= at, \end{cases}$$

o que significa que (x,y) está na recta $p\langle \mathbf{v} \rangle$, sendo $p = (-\frac{c}{a}, 0)$ (o ponto em que $t = 0$, por exemplo) e $\mathbf{v} = (-b,a)$. Assim L e $p\langle \mathbf{v} \rangle$ coincidem. O caso em que $b \neq 0$ é análogo. A última frase deixa-se para o leitor. □

EXERCÍCIO 1.16. Mostre que qualquer recta não vertical se escreve na forma $y = mx + b$ para certos reais $m, b \in \mathbb{R}$. Esta é a chamada *equação reduzida* da recta (que, no entanto, exclui as rectas verticais), onde m se designa por *declive* da recta.

COROLÁRIO 1.17. *Se a recta* $p\langle \mathbf{v} \rangle$ *admite a equação Cartesiana* $ax+by+c=0$*, então* $\mathbf{v}$ *é ortogonal ao vector* (a,b)*.*

DEMONSTRAÇÃO. Segundo a demonstração do teorema 1.15, um possível vector direcção é $\mathbf{v} = (-b,a)$, portanto:

$$(a,b) \cdot \mathbf{v} = (a,b) \cdot (-b,a) = -ab + ba = 0,$$

o que mostra a ortogonalidade. Note-se que, escolhendo um múltiplo do vector (a,b,c), a ortogonalidade mantém-se. □

EXERCÍCIO 1.18. Considere as duas equações $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$. Mostre a segunda parte do Teorema 1.15: estas equações representam a mesma recta se e só se existe um escalar não nulo λ com $\lambda(a,b,c) = (a',b',c')$.

1.2.2. Definição geométrica de rectas. Outra forma de pensar em rectas é como o lugar geométrico dos pontos a igual distância de outros dois pontos fixos.

DEFINIÇÃO 1.19. Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$. O **segmento de recta** entre p e q é o conjunto:

$$[p,q] := \{p + t(q-p) \ : \ t \in [0,1]\}.$$

EXERCÍCIO 1.20. A **semi-recta** que começa em p e passa por q é o conjunto $[p,q(:= \{p+t(q-p) : t \geq 0\}$. Mostre que a intersecção de duas semi-rectas pode ser: a) o conjunto vazio; b) um ponto; c) um segmento de recta; ou d) uma semi-recta.

TEOREMA 1.21. *Sejam* p,q *dois pontos no plano* $\mathbb{R}^2$*. O conjunto de pontos a igual distância de* p *e* q *é uma recta. Reciprocamente, dada uma qualquer recta* L*, existem* p,q *tais que* L *é o conjunto de pontos a igual distância de* p *e* q*. Além disso, o segmento* $[p,q]$ *é ortogonal a* L*.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando $p = (x_1, y_1)$ e $q = (x_2, y_2)$ temos que resolver a equação $||(x,y) - p|| = ||(x,y) - q||$ ou seja

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}.$$

Isto equivale a

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 &= x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \\ (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y &= \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2). \end{aligned}$$

Esta é uma equação linear afim nas variáveis x e y, pelo que representa uma recta. As restantes afirmações deixam-se para o leitor. □

EXERCÍCIO 1.22. Complete a demonstração do Teorema 1.21.

1.2.3. Paralelismo. Se considerarmos duas rectas distintas, elas podem intersectar-se ou não.

DEFINIÇÃO 1.23. Duas rectas dizem-se **concorrentes** se se intersectam num único ponto. Dizem-se **paralelas** caso contrário.

OBSERVAÇÃO 1.24. De acordo com esta definição qualquer recta é paralela a si própria. Assim, o paralelismo é uma *relação de equivalência*.

EXERCÍCIO 1.25. Mostre que as duas rectas $p\,\langle \mathbf{v}\rangle$ e $q\,\langle \mathbf{w}\rangle$ são paralelas se e só se os vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são multiplos escalares um do outro.

TEOREMA 1.26. *Dadas duas rectas de equações cartesianas*

$$\begin{aligned} ax+by+c &= 0\\ \tilde{a}x+\tilde{b}y+\tilde{c} &= 0, \end{aligned}$$

elas são paralelas se e só se

$$\det\begin{pmatrix} a & b\\ \tilde{a} & \tilde{b}\end{pmatrix}=0.$$

DEMONSTRAÇÃO. A matriz A cujas linhas são (a,b) e $(\tilde{a},\tilde{b})$ tem característica igual a 1 ou 2 (não pode ser zero porque os vectores linha não são nulos). Então, se $\det A \neq 0$, a solução do sistema composto pelas duas equações é única:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} -c\\ -\tilde{c}\end{pmatrix}.$$

Assim, este é o único ponto de intersecção das rectas que são, portanto, concorrentes. No caso em que a característica de A é 1, podemos não ter uma solução do sistema (rectas paralelas e distintas), ou infinitas soluções (as duas equações definem a mesma recta). □

1.2.4. Distância entre um ponto e uma recta. Dados um ponto e uma recta, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.27. A **distância entre um ponto p e uma recta** L é a menor distância entre p e qualquer ponto da recta L.

A priori, não é evidente que essa menor distância exista, uma vez que L tem infinitos pontos (excepto quando $p \in L$, caso em que naturalmente a distância de p a L é zero).

OBSERVAÇÃO 1.28. Supondo que $p \notin L$, considere-se o ponto de intersecção (x,y) de L com a recta ortogonal a L que contém p. Usando a desigualdade triangular, vemos que este é, de facto, o ponto da recta L que minimiza a distância a p.

TEOREMA 1.29. *A distância do ponto $p=(x_0,y_0)$ à recta L dada por $ax+by+c=0$ é:*

$$d(p,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a observação anterior, sendo $(x,y)\in L$ o ponto de intersecção com a recta ortogonal a L que contém em p, é preciso resolver:

$$\begin{cases} x = & x_0+at\\ y = & y_0+bt\\ 0 = & ax+by+c\\ d = & \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\end{cases}$$

em ordem a t, x, y, d. Substituindo as primeiras duas na terceira obtemos:

$$0 = a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = ax_0 + by_0 + c + (a^2 + b^2)t,$$

pelo que

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Substituindo na última equação

$$d = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = |t|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

como pretendido. □

1.3. Polígonos

1.3.1. Semiplanos e polígonos convexos. Vamos começar por definir semiplanos.

DEFINIÇÃO 1.30. Um **semiplano aberto** H é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por uma desigualdade da forma:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by + c > 0\}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq \mathbf{0}$ como no caso das rectas. Um **semiplano fechado** é definido da mesma forma, usando o sinal $\geq$ em vez de $>$. A **recta fronteira** de H é a recta $ax + by + c = 0$.

EXERCÍCIO 1.31. Mostre que o complementar de uma recta é a união de dois semiplanos disjuntos.

Uma das importantes propriedades dos semiplanos é a convexidade.

DEFINIÇÃO 1.32. Um subconjunto do plano $A \subset \mathbb{R}^2$ diz-se **convexo** se para qualquer par de pontos $p, q \in A$ temos $[p, q] \subset A$.

Como exemplos de conjuntos convexos temos os semiplanos e as rectas ou segmentos de recta. Obviamente, nem todos os conjuntos são convexos, como por exemplo uma circunferência (embora o círculo interior seja convexo). Vamos agora definir polígonos convexos.

DEFINIÇÃO 1.33. Um **polígono convexo** é a intersecção de um número finito de semiplanos fechados, que forma um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$.

EXERCÍCIO 1.34. Mostre que a intersecção de um conjunto finito de conjuntos convexos é convexo. Em particular um polígono convexo é um conjunto convexo, como convém.

Muitas vezes estamos também interessados na fronteira de um polígono, que é formada por todos os segmentos de recta dos semiplanos que foram intersectados.

DEFINIÇÃO 1.35. Seja P um polígono convexo obtido como

$$\bigcap_{j=1}^{n} H_j$$

onde H_j são semiplanos *fechados*. A **fronteira** de P é o conjunto formado por $\cup_{j=1}^{n}(R_j \cap P)$ onde R_j é a recta fronteira de H_j.

1.3.2. Linhas poligonais. Linha poligonais são generalizações dos conjuntos fronteira de polígonos. Recordemos que o segmento de recta (orientado) entre p e $q \neq p$ é denotado por $[p, q] \in \mathbb{R}^2$. Vamos também denotar:

$$]p, q[= [p, q] \setminus \{p, q\}.$$

DEFINIÇÃO 1.36. Uma **linha poligonal** é uma união de segmentos de recta orientados:

$$[p_1, p_2, \cdots, p_n] := \bigcup_{j=1}^{n-1} [p_j, p_{j+1}].$$

onde $p_j \in \mathbb{R}^2$. Uma linha poligonal diz-se **fechada** se $p_n = p_1$. Um **polígono de n lados** é uma linha poligonal fechada composta por n segmentos de recta que não se intersectam excepto nos extremos, isto é, tal que os pontos $p_1, \cdots, p_{n-1}$ são todos distintos e

$$]p_i, p_{i+1}[\cap]p_j, p_{j+1}[= \emptyset,$$

para todo i, j.

EXERCÍCIO 1.37. Mostre que a fronteira de um polígono convexo é uma linha poligonal *fechada*.

Os segmentos de recta da fronteira de um polígono chamam-se lados do polígono.

EXERCÍCIO 1.38. Seja P um polígono convexo. Mostre que $P \cap H = P$ sempre que H é um semiplano fechado cuja recta fronteira contém um lado de P.

1.3.3. Polígonos.

DEFINIÇÃO 1.39. Um polígono é a união de um número finito de polígonos $P_1, \cdots, P_n$ tais que $P_i \cap P_j$ se intersectam apenas *num único lado comum*.

PROPOSIÇÃO 1.40. *Um polígono é um conjunto compacto e pode dividir-se em triângulos.*

DEMONSTRAÇÃO. No caso de polígonos convexos, o resultado é simples. Para polígonos arbitrários, usam-se as triangulações dos polígonos convexos que o compõem. □

EXERCÍCIO 1.41. A fronteira de um polígono não necessariamente convexo é a sua fronteira topológica. Mostre que esta definição coincide com a anterior (para polígonos convexos); prove que a fronteira de um polígono (não necessariamente convexo) é uma linha poligonal fechada.

TEOREMA 1.42. *Um polígono convexo de n lados tem a soma dos ângulos internos igual a $\pi(n-2)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usa-se a decomposição de um polígono convexo de n lados em $n-2$ triângulos, e o facto de que cada um destes tem ângulos internos que somam a π. □

1.4. Cónicas e sua classificação

As cónicas são figuras geométricas clássicas e têm várias propriedades interessantes no que toca a distâncias, simetria, etc. Mais uma vez temos duas alternativas: defini-las usando propriedades geométricas, como distâncias a pontos (ou rectas) especificados *a priori*, ou usar uma abordagem Cartesiana definindo cónicas através de expressões polinomiais nas coordenadas (x, y) do plano.

1.4.1. Cónicas e cónicas degeneradas. Vamos começar pela abordagem Cartesiana. Assim, da mesma forma que uma recta pode ser representada por uma equação polinomial de grau 1, uma cónica é definida por uma equação polinomial de grau 2, nas variáveis x e y.

DEFINIÇÃO 1.43. Uma **cónica** é uma equação polinomial da forma:

$$f(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0,$$

onde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e $a, \cdots, e, k$ são parâmetros reais.

Léxico Vamos chamar cónica tanto à equação acima, como ao conjunto de pontos que ela define em $\mathbb{R}^2$:

$$C_f = \{(x, y) : f(x, y) = 0\},$$

o que simplifica a terminologia, e será claro pelo contexto.

Como exemplos de cónicas temos as *circunferências* e as *elipses*, as *parábolas* e as *hipérboles*, definidas de seguida. Uma vez que as cónicas são dadas por equações algébricas, há alguns casos que chamaremos *degenerados*.

EXEMPLO 1.44. (i) Considere a cónica definida por $x^2 - y^2 = 0$. Neste caso, temos, $b = d = e = k = 0$, $a = -c = 1$. O conjunto de pontos representados são duas rectas concorrentes que passam na origem.

(ii) Outro exemplo que queremos evitar é $x^2 + y^2 = -2$. Aqui o conjunto representado é vazio.

DEFINIÇÃO 1.45. Uma cónica **degenerada** é uma cónica que contém uma recta ou está contida numa recta. Caso contrário, a cónica chama-se **não degenerada**.

1.4.2. Cónicas e secções de um cone. A palavra "cónicas" sugere uma relação com cones. De facto, estas figuras geométricas no plano, são secções de um cone tridimensional. Para entendermos isto, consideremos primeiro o cone usual:

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Uma "secção" deste cone será a intersecção dele com um plano em $\mathbb{R}^3$. Da mesma forma que uma recta, no plano, tem equação cartesiana $ax + by + c = 0$, a equação geral cartesiana de um plano em $\mathbb{R}^3$ será:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Assim a intersecção do cone com o plano será dado pela solução simultânea das duas equações acima. Projectar esta intersecção no plano (x, y) corresponde a eliminar a variável z das duas equações. Isto significa, tomando $c \neq 0$, fazer a substituição $z = \frac{1}{c}(-ax - by - d)$ na equação do cone, o que nos dá:

$$\frac{1}{c^2}(ax + by + d)^2 = x^2 + y^2,$$

o que é claramente uma equação polinomial de grau 2 nas variáveis x e y. Como uma projecção é uma aplicação linear, a equação da figura intersecção é também um polinómio do mesmo tipo.

1.4.3. Elipses, Parábolas e Hipérboles. Da mesma forma que uma recta pode ser vista como o conjunto de pontos que verifica uma certa condição nas distâncias a dois pontos dados (Teorema 1.21), as cónicas podem ser também definidas de forma semelhante. Estas condições geométricas permitem dividir as cónicas não degeneradas nos três casos clássicos: elipses, parábolas e hipérboles.

DEFINIÇÃO 1.46. Sejam p e q dois pontos distintos. Uma **elipse de focos em p e q** é a figura plana formada pelos pontos m cuja *soma* das distâncias a p e a q é constante. Concretamente, é um conjunto da forma:

$$E := \{m \in \mathbb{R}^2 : \ d(p, m) + d(q, m) = K\},$$

para certo real positivo K.

Veremos que as elípses são cónicas.

EXEMPLO 1.47. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ é a elípse centrada em (x_0, y_0) com vértices em $(x_0 \pm a, y_0)$ e $(x_0, y_0 \pm b)$ e focos em $(x_0 \pm c,\ y_0)$ sendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, assumindo $a > b > 0$.

DEFINIÇÃO 1.48. Uma **hipérbole de focos em p e q** é o lugar geométrico dos pontos m cujas distâncias a p e q verificam

$$\Big|d(p, m) - d(q, m)\Big| = K$$

para certo real positivo K.

EXEMPLO 1.49. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ é a hipérbole de centro em (x_0, y_0), com vértices em $(x_0 \pm a, y_0)$ e focos em $(x_0 \pm c,\ y_0)$ sendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

DEFINIÇÃO 1.50. A **parábola com foco em p e recta directriz** L é o lugar geométrico dos pontos m cujas distâncias a p e L verificam $d(p, m) = d(L, m)$.

EXEMPLO 1.51. A equação $y = \frac{x^2}{4a}$ representa a parábola de foco $(0, a)$ e recta directriz $y = -a$.

1.4.4. Relação entre as definições geométricas e algébricas. Vejamos que a elipse E na definição 1.33 é dada pela equação quadrática usual, quando os focos estão no eixo dos x, localizados em $p_\pm = (\pm x_0, 0)$. Sendo $p = (x, y)$, $d_1 = d(p_+, p) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$ e $d_2 = d(p_-, p) = \sqrt{(x + x_0)^2 + y^2}$ temos:

$$d_1 + d_2 = K \quad \Leftrightarrow \quad d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 = K^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4d_1^2 d_2^2 = (K^2 - d_1^2 - d_2^2)^2$$

o que nos dá:

$$2K^2(d_1^2+d_2^2)-(d_1^2-d_2^2)^2-K^4=0.$$

Notando que $d_1^2+d_2^2=2(x^2+y^2+x_0^2)$ e que $d_1^2-d_2^2=4xx_0$ a equação acima fica:

$$4K^2(x^2+y^2+x_0^2)-16x^2x_0^2-K^4=0$$

o que equivale a

$$x^2\left(\frac{4K^2-16x_0^2}{K^4-4K^2x_0^2}\right)+y^2\left(\frac{4}{K^2-4x_0^2}\right)=1,$$

que é uma equação que representa uma elipse. Note-se que necessariamente $K>2x_0$ ou seja $K^2>4x_0^2$, de modo que os coeficientes de x^2 e y^2 são ambos positivos.

De forma análoga se pode mostrar que as definições geométricas de hipérbole e parábola dão origem às expressões cartesianas usuais.

1.4.5. Classificação das cónicas. As equações das cónicas consideradas na secção 1.3.2 são simples, porque não têm termo em xy. Isto faz com que, por exemplo no caso da elípse, os seus focos estejam alinhados em rectas horizontais ou verticais. Naturalmente, há muitos outros casos de elípses em que os eixos principais não são paralelos ao eixo dos x ou dos y.

Se considerarmos outras variáveis x' e y' reelacionadas com x,y de forma linear, ou seja:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e $f(x,y)=0$ é uma cónica, então $f(x',y')=0$ é outra cónica, pois a transformação linear não faz aumentar o grau do polinómio. Além disso, se a transformação linear preserva distâncias, então as cónicas mantém o seu tipo.

DEFINIÇÃO 1.52. Uma **transformação geométrica** (do plano nele próprio), ou simplesmente uma **transformação**, é uma aplicação **bijectiva** $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Uma **isometria** é uma transformação geométrica que preserva as distâncias. Mais concretamente, uma isometria $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ verifica:

$$||A(\mathbf{v})-A(\mathbf{w})||=||\mathbf{v}-\mathbf{w}||,\quad \forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2.$$

A equação acima também se pode escrever como $||A(p)-A(q)||=||p-q||$, quando nos referimos a pontos p,q no plano.

PROPOSIÇÃO 1.53. *Seja* $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ *onde* A *é uma isometria, sendo* $\mathbf{x}=(x,y)$ $\mathbf{y}=(\tilde{x},\tilde{y})$. *Então, se* $f(x,y)=0$ *é uma elipse, parábola ou hipérbole, então* $f(\tilde{x},\tilde{y})$ *também.*

DEMONSTRAÇÃO. Isto resulta directamente do facto que uma isometria preserva distâncias, e cada uma das cónicas mencionadas podem ser definidas em termos de distâncias a focos ou a rectas. □

Seja $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+k=0$ uma cónica genérica. Podemos escrever esta equação na forma

$$f(x,y)=\mathbf{x}^tQ\mathbf{x}+2\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}+k=0,$$

onde $\mathbf{x}=(x,y)$, $\mathbf{v}=(d,e)$ e Q é a matriz simétrica

$$Q=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

chamada a matriz da cónica.

DEFINIÇÃO 1.54. O discriminante de C (ou de f) é

$$\Delta_C=\det Q=ac-b^2.$$

O próximo teorema permite classificar o tipo de cónicas possíveis em função do sinal do discriminante. Recordemos a seguinte definição de matrizes ortogonais.

DEFINIÇÃO 1.55. Seja A uma matriz $n\times n$. A diz-se **ortogonal** se preserva o produto interno, isto é se $A\mathbf{v}\cdot A\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ para quaisquer $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 1.56. Mostre que qualquer matriz $n \times n$ ortogonal A verifica $A^tA = I_n$ onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

TEOREMA 1.57. *Seja $f(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+k = 0$ uma cónica, Q_f a sua matriz e Δ o seu discriminante. Então, se C (o conjunto de zeros de $f(x,y)$) for uma cónica não degenerada, então:*

- *Se $\Delta > 0$, C é uma elípse (ou circunferência);*
- *Se $\Delta = 0$, C é uma parábola;*
- *Se $\Delta < 0$ C é uma hipérbole.*

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que $\Delta = ac - b^2$ é o determinante de

$$Q_f = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

e vamos considerar primeiro o caso $\Delta \neq 0$. Então o gradiente de f, dado por:

$$\nabla f = 2(ax + by + d,\ bx + cy + e)$$

apenas se anula nos pontos de intersecção das rectas dadas por $ax + by + d = 0$ e $bx + cy + e = 0$. Como vimos na Proposição 1.26, como $\det Q_f \neq 0$ estas rectas são concorrentes pelo que o ponto de intersecção é único, que designamos por (x_0, y_0). Como a matriz Hessiana de f é:

$$H_f = 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

podemos escrever (expansão de Taylor em torno de (x_0, y_0)):

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \mathbf{x}^t Q_f \mathbf{x},$$

onde $\mathbf{x} = (x - x_0, y - y_0)$. Como Q_f é simétrica, ela pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal T. Assim, existe uma matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta)$ tal que $Q_f = T^{-1}DT = T^tDT$ (pois $T^tT = I_2$ a matriz 2×2 identidade), ou seja:

$$\mathbf{x}^t Q_f \mathbf{x} = \mathbf{x}^t T^t D T \mathbf{x}.$$

Assim, nas variáveis $\mathbf{y} = T\mathbf{x} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ temos $f(x,y) = k_0 + \alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{y}^2$, com $k_0 = f(x_0, y_0)$. Se definirmos

$$g(x,y) := k_0 + \alpha x^2 + \beta y^2 = 0$$

como outra cónica, pela Proposição 1.53, o tipo de g é o mesmo tipo de f. Como a cónica g é evidentemente elípse ou hipérbole, caso $\alpha\beta$ seja positivo ou negativo, e

$$\alpha\beta = \det D = \det T^{-1}DT = \det Q_f = \Delta,$$

o teorema está concluído no caso $\Delta \neq 0$. O caso $\Delta = 0$ é tratado de forma semelhante, analizando com cuidado e separadamente os casos em que $(a,b) = \mathbf{0}$, $(b,c) = \mathbf{0}$ ou nenhum destes dois vectores é nulo, mas são linearmente dependentes (pois $\Delta = 0$). □

Nos casos degenerados temos o seguinte.

TEOREMA 1.58. *Seja $f(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+k = 0$ uma cónica degenerada, Q_f a sua matriz e Δ o seu discriminante.*

- *Se $\Delta > 0$, então C é vazio ou é um ponto;*
- *Se $\Delta = 0$, então C é vazio, ou é constituído por uma ou duas rectas;*
- *Se $\Delta < 0$, então C é constituido por duas rectas concorrentes (e não pode ser vazio).*

DEMONSTRAÇÃO. Os casos degenerados são aqueles em que C contém ou está contido numa recta. Comecemos pelos casos em que C contém uma recta, por exemplo a recta de equação $\alpha x+\beta y+\varepsilon = 0$. Então $f(x,y) = 0$ é o produto do factor $h(x,y) := \alpha x+\beta y+\varepsilon$ por outro factor $g(x,y)$. Como $f = gh$ é polinómio de grau 2, g só pode ser polinómio de grau 1, como h. Assim, temos os casos em que $g = 0$ e $h = 0$ representam rectas concorrentes, paralelas, ou a mesma recta. No primeiro caso temos

$$f(x,y) = (\gamma x + \delta y + \eta)(\alpha x + \beta y + \varepsilon) = 0,$$

onde as duas rectas indicadas são concorrentes. Isto significa que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Calculemos agora o discriminante de f:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2} \\ \frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2} & \beta\delta \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta - \frac{(\beta\gamma+\alpha\delta)^2}{4} = -\frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)^2}{4} < 0.$$

No caso de termos h múltiplo de g, ou que representam rectas paralelas, vem $\Delta = 0$. Finalmente, é fácil ver que nos casos em que C não contém uma recta, ou é vazio ou apenas 1 ponto, e são casos em que a matriz Q_f é definida positiva ou definida negativa. Assim, temos a equação $f = k_0 + \mathbf{x}^t Q_f \mathbf{x} = 0$ (após completarmos os quadrados), e sendo Q_f definida, temos um ponto quando $k_0 = 0$, um conjunto vazio, ou uma elípse (caso não degenerado). □

1.5. Isometrias do Plano

Uma isometria do plano é uma transformação bijectiva do plano em si mesmo que preserva todas as distâncias entre dois pontos. As isometrias mais simples são as translações e as rotações em torno da origem. Há também reflexões através de uma dada recta. Veremos que ao compor translações, rotações e reflexões não obtemos nenhuma transformação essencialmente nova. Mais relevante ainda é o recíproco: qualquer isometria será uma composição deste tipo de transformações. Nesta secção analisamos estas transformações, veremos a utilidade dos números complexos, e mostramos o teorema de classificação das isometrias.

1.5.1. Translações e rotações no plano. Recordemos que uma *transformação* do plano euclideano (também chamada *transformação geométrica*) é uma aplicação *bijectiva* entre $\mathbb{R}^2$ e si mesmo. Rotações e translações são exemplos de transformações, que merecem notação específica.

DEFINIÇÃO 1.59. Seja $\mathbf{v} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $\theta \in \mathbb{R}$. A **translação segundo v** é a aplicação definida por

$$T_{\mathbf{v}}(x, y) = (x + u, y + v).$$

A **rotação de ângulo** $\theta \in \mathbb{R}$ **em torno da origem** é a aplicação definida por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta,\ x \sin\theta + y \cos\theta),$$

e a **rotação de ângulo** θ **em torno do ponto** p é dada por

$$T_p \circ R_\theta \circ T_{-p}.$$

(Novamente, identificamos vectores em $\mathbb{R}^2$ com os pontos do plano).

EXERCÍCIO 1.60. Mostre que as rotações em torno da origem são transformações lineares, mas as translacções não são (excepto a indentidade). Escreva a representação matricial de R_θ.

Pelo seu papel importante, vamos chamar **rotação linear** às rotações em torno da origem, ou seja às transformações R_θ, para certo ângulo de rotação $\theta \in \mathbb{R}$. A seguinte proposição é relativamente elementar.

PROPOSIÇÃO 1.61. *A composição de translações é uma translação, e* $T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathbf{w}} = T_{\mathbf{w}} \circ T_{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. *A composição de rotações lineares é uma rotação linear, e* $R_\alpha \circ R_\beta = R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Por contraste, a composição de translações e rotações não é comutativa.

EXEMPLO 1.62. Vamos compor as transformações $T_{\mathbf{v}}$ e R_θ com $\mathbf{v} = (3, -1)$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$, das duas formas distintas.

Em geral temos a seguinte fórmula.

LEMA 1.63. *A composição de rotações lineares e translações verifica:*

$$R_\theta \circ T_{\mathbf{v}} = T_{R_\theta(\mathbf{v})} \circ R_\theta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $R_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a representação matricial de R_θ e $\mathbf{v} = (u, v)$, temos:

$$\begin{aligned} R_\theta \circ T_{\mathbf{v}}(x, y) &= R_\theta(x + u, y + v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x+u \\ y+v \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T_{R_\theta(\mathbf{v})} \circ R_\theta(x, y), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

DEFINIÇÃO 1.64. Uma composição arbitrária finita de translações e rotações lineares chama-se uma **isometria directa**. De acordo com a Proposição seguinte estas isometrias formam um grupo, o **grupo de isometrias directas**, denotado por $Iso^+(\mathbb{R}^2)$.

PROPOSIÇÃO 1.65. *O conjunto de todas as isometrias directas forma um grupo não abeliano, e qualquer elemento deste grupo é da forma:*

$$T_p \circ R_\theta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos compor qualquer número de rotações e translacções: $T_1 \circ R_1 \circ \cdots \circ T_n \circ R_n$. Usando a fórmula do lema anterior, vemos que podemos reduzir a uma transformação da forma

$$T_p \circ R_\theta,$$

onde θ é a soma de todos os ângulos das rotações $R_1, \cdots, R_n$. □

EXERCÍCIO 1.66. Mostre que as transformações geométricas formam um grupo em que a operação é a composição. Mostre que as isometrias directas são transformações do plano, e formam um subgrupo das transformações geométricas.

DEFINIÇÃO 1.67. Um **ponto fixo** de uma transformação geométrica A é um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $A(p) = p$.

EXEMPLO 1.68. A transformação identidade fixa $\mathbb{R}^2$, a isometria $F(x,y) = (-x,y)$ fixa todos os pontos da recta vertical. Uma rotação linear fixa apenas a origem e uma translação não tem pontos fixos.

EXERCÍCIO 1.69. Mostre que uma rotação (que não é a identidade) tem um único ponto fixo (o ponto em torno do qual roda). Mostre que se uma rotação é uma transformação linear, então é uma rotação em torno da origem.

1.5.2. Linearização e matrizes ortogonais. Recorde-se que uma **isometria** no plano $\mathbb{R}^2$ é uma transformação geométrica $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifica

$$||F(p) - F(q)|| = ||p - q||,$$

para todos os pontos $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Nem todas as isometrias são composições de rotações e translações (nem todas as isometrias são directas). Para estudar esta questão começamos por observar que há três vias úteis de representar uma isometria $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

- via geométrica: explicitando pontos fixos, ângulos de rotação, vectores de translação, etc;
- via algébrica: escrevendo a isometria como composição de outras mais simples como R_θ, $T_{\mathbf{v}}$ etc;
- via analítica: através da sua expressão analítica, ou seja, escrevedo as coordenadas da imagem $F(p)$ como função das coordenadas x e y de cada ponto p.

EXERCÍCIO 1.70. Defina isometria em $\mathbb{R}^n$ de forma análoga, e determine todas as isometrias de $\mathbb{R}$.

Recordemos também que uma **matriz ortogonal** $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é aquela que verifica $A^t A = I_n$ onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ e ^{t} denota a operação de transposição. É fácil de verficar que tais matrizes formam um grupo (um subgrupo do grupo das matrizes $n \times n$ com a operação de produto matricial), e introduzimos a seguinte terminologia.

Notação O **grupo ortogonal** de $\mathbb{R}^2$ é o grupo das matrizes ortogonais 2×2, e denota-se por $O(2)$; o subgrupo das matrizes ortogonais A que verificam $\det A = 1$, chama-se **grupo especial ortogonal** e denota-se por $SO(2)$.

As matrizes ortogonais A verificam $(\det A)^2 = \det(A^t)\det(A) = \det(A^t A) = \det I = 1$ o que implica $\det A = \pm 1$.

TEOREMA 1.71. *[Teorema da Linearização] Qualquer isometria F se escreve como*

$$F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{w},$$

onde $A \in O(2)$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. Esta isometria é directa se e só se $A \in SO(2)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja A uma isometria directa. Usamos a Proposição anterior para escrever $F = T_p \circ R_\theta$. Logo basta ver que $R_\theta \in SO(2)$ o que é simples (exercício anterior). Se F for uma isometria que não é directa, com $F(0) = w$, temos que $G := F - w$ é isometria que fixa a origem. Como G é também isometria, G preserva os produtos internos [Exercício]. Daqui segue também, representando um vector como $\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$ que G é uma transformação linear. Logo G é representada por uma matriz ortogonal. □

OBSERVAÇÃO 1.72. Este resultado é válido (com demonstração análoga) para qualquer $\mathbb{R}^n$, substituindo-se $O(2)$ pelo grupo das matrizes ortogonais $n \times n$, $O(n)$ e $SO(2)$ por $SO(n)$ (o subgrupo de $O(n)$ das matrizes de determinante 1).

COROLÁRIO 1.73. *O grupo das rotações lineares é um subgrupo do grupo das isometrias directas, e é isomorfo a $SO(2)$.*

DEMONSTRAÇÃO. No Teorema anterior, as rotações lineares não têm o segundo termo. Assim, temos apenas um elemento $B \in SO(2)$. □

OBSERVAÇÃO 1.74. Note-se que, na representação do Teorema 1.71, a matriz A é a matriz da derivada da aplicação F.

EXERCÍCIO 1.75. Mostre que o conjunto das rotações em torno de um ponto p forma um grupo, e que este é também isomorfo a $SO(2)$.

1.5.3. Isometrias no plano complexo e transitividade. Há uma quarta forma de caracterizar isometrias que normalmente simplifica o tratamento analítico, usando a correspondência natural entre o plano complexo e o plano euclideano. De facto, vamos encontrar expressões mais simples para muitas transformações geométricas como funções $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Para isto, a correspondência básica entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto z = x + iy, \end{aligned}$$

e a inversa transforma um número complexo z no vector $(\Re z, \Im z) \in \mathbb{R}^2$, onde $\Re$ e $\Im$ representam a parte real e a imaginária, respectivamente.

Notação Esta correspondência entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ fixa-se de uma vez por todas, de forma que usaremos vectores $\mathbf{v}$, pontos p, ou números complexos z, conforme seja útil, sem necessidade de a explicitarmos.

TEOREMA 1.76. *Qualquer isometria directa se pode escrever como $F(z) = az + b$ com $|a| = 1$ e $b \in \mathbb{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Um cálculo simples mostra que as rotações lineares correspondem a multiplicação por um número complexo de módulo 1. Assim, o resultado segue imediatamente do Teorema 1.71 (para o caso de isometrias directas). □

EXEMPLO 1.77. Consideramos novamente as transformações $T_\mathbf{v}$ e R_θ com $\mathbf{v} = (3, -1)$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Temos então que $\mathbf{v}$ corresponde ao número complexo $3 - i$ e R_θ a multiplicação por $e^{i\theta}$. Assim:

$$T_\mathbf{v} \circ R_\theta(z) = e^{i\theta}z + 3 - i,$$

e

$$R_\theta \circ T_\mathbf{v}(z) = e^{i\theta}(z + 3 - i) = e^{i\theta}z + 3e^{i\theta} - ie^{i\theta}.$$

Por exemplo, a relação do Lemma 1.63 pode escrever-se como: $R_\theta \circ T_z = T_{e^{i\theta}z} \circ R_\theta$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO 1.78. *Qualquer isometria directa que não é translação, tem um único ponto fixo, e é uma rotação em torno desse ponto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f(z) = az + b = T_p \circ R_\theta \circ T_{-p}$, para certo p e $|a| = 1$. Então podemos encontrar o ponto $p = w$ da seguinte forma:

$$az + b = T_w(e^{i\theta}(z - w)) = e^{i\theta}z + w - e^{i\theta}w$$

o que leva a concluir que $a = e^{i\theta}$ e $b = w(1 - e^{i\theta})$ ou seja

$$w = \frac{b}{1 - e^{i\theta}},$$

e note-se que $e^{i\theta} \neq 1$ é precisamente a condição para que f não seja uma translação. □

O próximo resultado tem a ver com a acção das isometrias no plano $\mathbb{R}^2$. É imediato que existe sempre uma isometria que envia um ponto noutro. Mais interessante é o facto de haver sempre uma isometria que envia um par de pontos noutro par, desde que as distâncias entre cada par sejam iguais.

TEOREMA 1.79. *[Transitividade] Sejam p_1, p_2, q_1, q_2 quatro pontos do plano. Existe uma isometria directa F que envia p_1 em q_1 e p_2 em q_2 se e só se $||p_1 - p_2|| = ||q_1 - q_2||$.*

DEMONSTRAÇÃO. A condição dada é necessária (por ser isometria). Para ver que é suficiente, sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ os números complexos correspondentes a $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$. Seja $d = ||p_1 - p_2|| > 0$ (o caso em que $d = 0$ é fácil) e procuremos uma isometria directa $G(z) = az + b$, com $|a| = 1$ e $b \in \mathbb{C}$, que envia z_1 e z_2 no eixo real, de forma a que $G(p_1) = 0$ e $G(p_2) = d \in \mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{C}$. Temos que resolver as equações:

$$\begin{cases} G(z_1) = & az_1 + b = 0 \\ G(z_2) = & az_2 + b = d, \end{cases}$$

Vem então: $a(z_2 - z_1) = d$, ou $a = d/(z_2 - z_1)$, pelo que

$$G(z) = az + (-az_1) = \frac{d}{z_2 - z_1}z - \frac{d}{z_2 - z_1}z_1 = d\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Se agora $\hat{G}$ é uma transformação que envia o par q_1, q_2 nos mesmos pontos $0, d$, então a transformação:

$$F(z) = \hat{G}^{-1} \circ G(z),$$

é a transformação pretendida. □

COROLÁRIO 1.80. *Na situação descrita acima, sendo p_1, p_2 e q_1, q_2 pontos distintos, a isometria directa que envia o primeiro par no segundo é única.*

1.5.4. Reflexões e isometrias indirectas. Vamos agora definir as reflexões, do ponto de vista geométrico e analítico. Como estas não serão isometrias directas, introduzimos a seguinte terminologia.

DEFINIÇÃO 1.81. Uma **isometria indirecta** é uma isometria que não é directa.

Seja L uma recta e p um ponto (fora de L ou não). L divide o plano em dois semiplanos H e H'. Começamos pela definição geométrica.

DEFINIÇÃO 1.82. A **reflexão do ponto p através de L**, é o ponto p' obtido geometricamente da seguinte forma: Se p está em L, $p' = p$. Se p pertence o semiplano H, então p' é o único ponto que verifica:

- $p' \in L^\perp \cap H'$, onde $L^\perp$ é a recta ortogonal a L que contém p;
- p' dista de p o dobro da distância de p a L.

Vejamos agora uma expressão analítca para as reflexões.

PROPOSIÇÃO 1.83. *Seja L a recta dada por $ax + by + c = 0$. A reflexão através da recta L é a transformação dada por:*

$$\mathscr{R}_L(x, y) = (x, y) - 2(ax + by + c)\frac{(a, b)}{a^2 + b^2}.$$

Em particular, $\mathscr{R}_L = T_{-2\delta\mathbf{n}} \circ \mathscr{R}_{L^0}$ *onde* $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)$ *é um vector normal unitário à recta* L, L^0 *a recta paralela a* L *que contém a origem, e* $\delta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *(de tal forma que* $|\delta| = dist(L, L^0)$*). Note-se também que* $\mathscr{R}_L \circ \mathscr{R}_L$ *é a transformação identidade.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 1.29, em particular da fórmula (2). □

Léxico Vamos chamar a uma reflexão que é uma transformação linear, uma **reflexão linear**. Estas são as reflexões através das rectas que passam pela origem.

EXEMPLO 1.84. Se L é dada por $x + y = 0$, $\mathscr{R}_L(x,y) = (-y,-x)$.

Recorde-se que $\bar{z} = x - iy$ é o complexo conjugado do número $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

EXEMPLO 1.85. Seja L o eixo dos x (a recta $\{y = 0\}$) e $L' = R_\theta(L)$ a rotação de L segundo o ângulo θ. Podemos ver que $\mathscr{R}_L(z) = \bar{z}$, e que $\mathscr{R}_{L'} = R_\theta \circ \mathscr{R}_L \circ R_{-\theta}$. Assim, a fórmula para $\mathscr{R}_{L'}$ no plano complexo é

$$\mathscr{R}_{L'}(z) = e^{2i\theta}\bar{z}.$$

EXERCÍCIO 1.86. Sendo L_θ a recta que passa na origem com ângulo θ relativamente ao eixo dos x, mostre que a representação matricial de $\mathscr{R}_{L_\theta}$ é:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

e conclua que todas as reflexões são isometrias indirectas.

PROPOSIÇÃO 1.87. *Uma isometria é directa (resp. indirecta) se e só se o determinante da sua derivada é* 1 *(resp.* -1*). A composição de 2 isometrias verifica a seguinte tabela:*

F	G	$F \circ G$
directa	directa	directa
indirecta	indirecta	directa
directa	indirecta	indirecta
indirecta	directa	indirecta

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação segue do Teorema 1.71, uma vez que, na fórmula $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{w}$, a matriz $A \in O(2)$ é precisamente a derivada da aplicação F. Relativamente às composições, basta ver que, se $G(\mathbf{v}) = B\mathbf{v} + \mathbf{w}'$, $B \in O(2)$ a composição escreve-se como:

$$F \circ G(\mathbf{v}) = A(B\mathbf{v} + \mathbf{w}') + \mathbf{w} = AB\mathbf{v} + A\mathbf{w}' + \mathbf{w},$$

e $\det AB = \det A \det B$. □

LEMA 1.88. *Uma rotação pode ser escrita como a composição de duas reflexões. Mais precisamente, sendo* L *e* L' *duas rectas concorrentes que formam um ângulo (orientado)* θ*, a composição:*

$$\mathscr{R}_{L'} \circ \mathscr{R}_L,$$

é uma rotação de ângulo 2θ *em torno do ponto de intersecção* $L \cap L'$*.*

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a Proposição anterior, a composição $\mathscr{R}_{L'} \circ \mathscr{R}_L$ é isometria directa. Supomos agora que $L \cap L'$ é a origem. Assim, $\mathscr{R}_{L'} \circ \mathscr{R}_L$ é uma rotação linear e, para determinar o ângulo desta rotação, sem perda de generalidade, podemos assumir que $L = \{y = 0\}$ e $L' = R_\theta(L)$, e em que $\mathscr{R}_L(z) = \bar{z}$. Pelo Exemplo 1.85:

$$\mathscr{R}_{L'} \circ \mathscr{R}_L(z) = \mathscr{R}_{L'}(\mathscr{R}_L(z)) = \mathscr{R}_{L'}(\bar{z}) = e^{2i\theta}z = R_{2\theta}(z),$$

como queríamos provar. O caso em que L e L' se intersectam noutro ponto demonstra-se compondo cada reflexão com translações apropriadas e deixam-se os detalhes para o leitor. □

EXERCÍCIO 1.89. Se L e L' são paralelas, mostre que $\mathscr{R}_{L'} \circ \mathscr{R}_L$ é uma translação.

A Proposição 1.83 mostra que uma reflexão é a composição de uma reflexão linear com uma translação. De facto, isto caracteriza todas as isometrias indirectas:

COROLÁRIO 1.90. *Qualquer isometria indirecta é a composição de uma reflexão linear com uma translação.*

DEMONSTRAÇÃO. Isto segue do teorema da linearização: escrevendo $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{w}$ vemos que $A \in O(2)$ tem determinante -1. Assim, para qualquer reflexão linear $\mathscr{R}_L$, $A\mathscr{R}_L$ é uma matriz de rotação R_θ pois tem determinante 1. Assim, $A = R_\theta \mathscr{R}_L$ é uma reflexão linear, de acordo com a tabela. □

EXERCÍCIO 1.91. Mostre que qualquer isometria indirecta se escreve como $f(z) = a\bar{z} + b$ com $a, b \in \mathbb{C}$ e $|a| = 1$.

PROPOSIÇÃO 1.92. *Seja F uma isometria que fixa 2 pontos. Então:*

- *ou F é directa e é a identidade,*
- *ou F é indirecta e é uma reflexão através da recta que os define.*

DEMONSTRAÇÃO. Se for directa, o resultado é consequência do Corolário 1.80. O caso indirecto é deixado para o leitor. □

1.5.5. Classificação de isometrias do plano.

DEFINIÇÃO 1.93. Uma reflexão deslizante é $T_{\mathbf{v}} \circ \mathscr{R}_L$ onde $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é um vector paralelo a L.

LEMA 1.94. *Uma reflexão deslizante é a composição de 3 reflexões.*

PROPOSIÇÃO 1.95. *Qualquer isometria indirecta que não é uma reflexão é uma reflexão deslizante.*

TEOREMA 1.96. *[Classificação por tipo] Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria diferente da identidade.*

- *Se F é directa, então F é uma rotação em torno de um ponto.*
- *Se F é indirecta, então F é uma reflexão ou uma reflexão deslizante.*

DEMONSTRAÇÃO. Se F é directa, o resultado segue da Proposição 1.78. Se é indirecta, usamos o teorema 1.71 para escrever $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{w}$ com $A \in O(2)$ de determinante -1. Assim, $A = \mathscr{R}_L$ é uma reflexão por uma recta linear L, o que implica $F = T_{\mathbf{w}} \circ \mathscr{R}_L$. Assim, ou $\mathbf{w}$ e L são paralelos e temos uma reflexão deslizante ou, pela Proposição 1.95, temos uma reflexão simples. □

COROLÁRIO 1.97. *[Classificação por reflexões] Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria diferente da identidade. Então f é a composição de $n = 1, 2$ ou 3 reflexões, e é directa se e só se $n = 2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 1.88 uma rotação linear é uma composição de duas reflexões. De facto, esse Lema pode provar-se também para qualquer outra rotação (em torno de ponto que não seja a origem). Finalmente, como é fácil escrever uma translação como composição de 2 reflexões, o resultado está provado para as isometrias directas. O caso das isometrias indirectas reduz-se à Proposição 1.95. □

COROLÁRIO 1.98. *[Classificação por pontos fixos] Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria diferente da identidade e P o conjunto dos seus pontos fixos. Então:*

- *Se F é directa, então: ou F é uma translação e P é vazio, ou é uma rotação e P é um ponto (o centro da rotação).*
- *Se F é indirecta, então: ou F é uma reflexão e P é uma recta (a recta que define a reflexão), ou é uma reflexão deslizante e P é vazio.*

EXERCÍCIO 1.99. Seja L a recta que passa na origem e faz um ângulo θ relativamente ao eixo dos x e seja F uma reflexão deslizante numa recta paralela a L. Mostre que a representação complexa de F é da forma $f(z) = e^{2i\theta}\bar{z} + b$ com b *não ortogonal* a L [Sugestão: verifique que se b é ortogonal a L então a função acima é uma reflexão (não deslizante)].

Podemos então resumir os resultados sobre isometrias na seguinte tabela:

orientação	tipo	representação em $\mathbb{C}$	pontos fixos
directa	trivial	$f(z) = z$	todos
directa	rotação	$f(z) = e^{i\theta}z + b,\ \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	$z_0 = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$
directa	translação	$f(z) = z + b,\ b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	nenhum
indirecta	reflexão	$f(z) = e^{2i\theta}\bar{z} + b,\ f(b) = 0$	a recta $\frac{b}{2} + e^{i\theta}t,\ t \in \mathbb{R}$
indirecta	reflexão deslizante	$f(z) = e^{2i\theta}\bar{z} + b,\ f(b) \neq 0$	nenhum

1.5.6. Grupos de isometrias. Como vimos, é vantajoso pensar em isometrias, tanto em termos de expressões algébricas bem como através de composições de translações, rotações, etc.

Notação Vamos usar as notações $Tra(\mathbb{R}^2)$, $Iso(\mathbb{R}^2)$ e $Iso^+(\mathbb{R}^2)$ para designar, respectivamente, os grupos das transformações geométricas, o das isometrias e o das isometrias directas.

PROPOSIÇÃO 1.100. *Temos as seguintes relações entre grupos:*

$$SO(2) \subset Iso^+(\mathbb{R}^2) \subset Tra(\mathbb{R}^2), \qquad O(2) \subset Iso(\mathbb{R}^2) \subset Tra(\mathbb{R}^2).$$

DEMONSTRAÇÃO. Como vimos, $SO(2)$ é o grupo de rotações lineares, que é um subgrupo das isometrias directas. Da mesma forma o grupo $O(2)$ é o grupo das isometrias lineares, que forma um subgrupo de todas as isometrias do plano. □

PROPOSIÇÃO 1.101. *As isometrias enviam rectas em rectas e cónicas em cónicas. Além disso, preservam o tipo da cónica.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma recta é um conjunto definido pela igualdade de duas distâncias, a pontos diferentes. Como as isometrias preservam distâncias, então a imagem de uma recta é ainda uma recta. O mesmo se passa para as cónicas. □

EXERCÍCIO 1.102. Dê um exemplo de uma transformação geométrica $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma uma recta numa parábola.

1.6. Semelhanças e outras transformações no Plano

Para melhor analisar as isometrias da esfera, vamos alargar as transformações que consideramos no plano.

1.6.1. Semelhanças.

DEFINIÇÃO 1.103. Uma semelhança no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação bijectiva $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para a qual existe um número real positivo $\alpha > 0$ que verifica

$$||F(p) - F(q)|| = \alpha||p - q||,$$

para todos os pontos $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Léxico O real $\alpha > 0$ que aparece da definição de semelhança é uma propriedade de cada semelhança F, e é chamado o **factor de escala de** F.

OBSERVAÇÃO 1.104. Podemos dividir as semelhanças em 3 casos, consoante o seu factor de escala. Dizemos que F é uma contração (respectivamente, expansão) caso $\alpha < 1$ ($\alpha > 1$, resp.). Se $\alpha = 1$ estamos no caso anteriormente descrito de uma *isometria* no plano.

EXERCÍCIO 1.105. (a) Mostre que qualquer semelhança linear F (semelhança que é transformação linear) é da forma $F(p) = \alpha R_\theta(p)$ para certo $\theta \in \mathbb{R}$, sendo $\alpha > 0$ o seu factor de escala.
(b) Mostre que as semelhanças formam um subgrupo das transformações geométricas, e que a composição de semelhanças $F \circ G$ tem um factor de escala $\alpha\beta$ sendo α e β os factores de escala de F e G.

Precisamente como no tratamento das isometrias do plano, de acordo com a orientação, há dois tipos de semelhanças: directas e indirectas (a mesma definição aplica-se, uma vez que as semelhanças também enviam rectas em rectas).

TEOREMA 1.106. *Qualquer semelhança $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se pode escrever como*

$$F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

onde $\alpha > 0$ é o factor de escala, $A = \alpha B$, $B \in O(2)$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$.

DEFINIÇÃO 1.107. Uma semelhança diz-se directa/indirecta consoante o sinal de $\det(A)$.

OBSERVAÇÃO 1.108. Note-se que $\det A = \alpha^2 \det B = \pm\alpha^2$ o que significa que $\det(A)$ nunca se anula, e o sinal do determinante da derivada de F determina se é directa ou indirecta.

EXERCÍCIO 1.109. Defina semelhança em $\mathbb{R}^n$ de forma análoga, e determine uma expressão geral para as semelhanças de $\mathbb{R}$. Mostre que uma semelhança de $\mathbb{R}$ que não é uma translação tem exactamente um ponto fixo.

COROLÁRIO 1.110. *As semelhanças lineares preservam os ângulos entre vectores.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores não nulos no plano, fazendo ângulo θ entre eles, seja F uma semelhança linear de factor, e digamos que $F(\mathbf{v})$ e $F(\mathbf{w})$ (não nulos também) fazem ângulo β entre eles. Assim:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}|| \cos\theta, \quad F(\mathbf{v}) \cdot F(\mathbf{w}) = ||F(\mathbf{v})||\,||F(\mathbf{w})|| \cos\beta.$$

De acordo com o teorema 1.106, se F tem factor de expansão $\alpha \neq 0$ então $F(\mathbf{v}) = \alpha B\mathbf{v}$ onde B é ortogonal. Assim

$$F(\mathbf{v}) \cdot F(\mathbf{w}) = \alpha B\mathbf{v} \cdot \alpha B\mathbf{w} = \alpha^2 (B\mathbf{v} \cdot B\mathbf{w}) = \alpha^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \alpha^2 ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}|| \cos\theta.$$

Por outro lado $||F(\mathbf{v})|| = \alpha||\mathbf{v}||$ e o mesmo para $\mathbf{w}$, pelo que $\cos\theta = \cos\beta$. Como tanto θ como β estão entre 0 e π, concluímos que $\theta = \beta$. □

Esta propriedade faz com que se possa pensar numa geometria em que as semelhanças sejam as transformações relevantes. Este tipo de geometria chama-se **geometria conforme**.

Em coordenadas complexas, as semelhanças adquirem uma forma muito simples: de facto, são representadas por funções lineares afins na variável $w \in \mathbb{C}$ ou em $\bar{w}$.

TEOREMA 1.111. *Qualquer semelhança directa é da forma*

$$f(w) = aw + b,$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Qualquer semelhança indirecta é da forma:

$$f(w) = a\bar{w} + b,$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

EXERCÍCIO 1.112. Mostre que todas as semelhanças directas têm um ponto fixo, excepto as translacções. Determine o ponto fixo da semelhança dada por $f(w) = 3iw - 2$.

TEOREMA 1.113. *[Transitividade] Qualquer semelhança que fixa 3 pontos não colineares do plano é a identidade. Dados 2 pares de pontos distintos $p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$ existem exactamente 2 semelhanças F que enviam um par no outro (ou seja $F(p_i) = q_i$, $i = 1, 2$): uma é directa e outra indirecta.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos usar as expressões complexas. Primeiro encontramos uma semelhança directa $g(z) = az + b$ que envia o par $z_1 \neq z_2$ no par de pontos $0, 1 \in \mathbb{C}$. É fácil de verificar directamente que (tomando $a = \frac{1}{z_2 - z_1}$ e $b = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}$), a função:

$$g(z) = \frac{1}{z_2 - z_1} z + \left(-\frac{z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_2}$$

cumpre esta propriedade. Da mesma forma $h(z) = \frac{z-w_1}{w_2-w_1}$ verifica $h(w_1) = 0$ e $h(w_2) = 1$. Como g e h são semelhanças (de factores de escala $1/|z_1 - z_2|$ e $1/|w_1 - w_2|$ respectivamente), têm funções inversas. Então, a semelhança

$$f := h^{-1} \circ g$$

dá-nos a semelhança pretendida. Note-se que, como g e h são as únicas semelhanças directas com as propriedades indicadas, a semelhança f a é a única semelhança *directa* que envia o par z_1, z_2 em w_1, w_2. Para encontrar a semelhança indirecta, basta compor com a reflexão $\mathscr{R}_L$, sendo L a recta que une w_1 a w_2. Assim $\tilde{f} = \mathscr{R}_L \circ f$ é a semelhança indirecta com a propriedade pretendida. □

1.6.2. Reflexões em circunferências. Vamos definir primeiro as reflexões relativas às circunferências centradas na origem:

$$C_r := \{x^2 + y^2 = r^2\}.$$

DEFINIÇÃO 1.114. A reflexão relativa à circunferência C_r é a aplicação:

$$\mathscr{R}_{C_r}(x, y) = r^2 \frac{(x, y)}{x^2 + y^2},$$

que está definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

OBSERVAÇÃO 1.115. Note-se que a reflexão $\mathscr{R}_{C_r}$ fixa todos os pontos de C_r e envia o seu interior (excepto a origem) no seu exterior, e vice-versa.

LEMA 1.116. *A reflexão na circunferência C_r descreve-se, no plano complexo, através da expressão:*

$$\mathscr{R}_{C_r}(w) = \frac{r^2}{\bar{w}}.$$

Define-se igualmente, reflexão relativa a uma circunferência arbitrária, compondo com translacções.

DEFINIÇÃO 1.117. Seja C a circunferência centrada em $p_0 = (x_0, y_0)$, de raio r. Define-se então:

$$\mathscr{R}_C(p) = T_{p_0} \circ \mathscr{R}_{C_r} \circ T_{-p_0}(p).$$

OBSERVAÇÃO 1.118. Note-se que a imagem de p_0 não está definida em $\mathbb{R}^2$. Assim, esta reflexão é uma transformação $\mathscr{R}_C : \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$, não sendo uma transformação geométrica de $\mathbb{R}^2$, no sentido estrito da definição dada. Mais tarde, veremos que pode ser interpretada como uma relfexão numa esfera.

PROPOSIÇÃO 1.119. *Seja $\mathscr{R}$ uma reflexão numa circunferência e D uma circunferência ou uma recta. Então $\mathscr{R}(D)$ é uma circunferência ou uma recta.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma vez que as translações gozam desta propriedade, e que qualquer reflexão em circunferências é uma conjugação, por translações, de uma reflexão em C_r para algum $r > 0$, basta mostrar este caso. De facto, basta mostrar o caso $r = 1$ uma vez que $\mathscr{R}_{C_r}$ é a composição de $\mathscr{R}_{C_1}$ com uma semelhança linear, que goza da mesma propriedade. Assim, seja D a circunferência de equação

$$|z - z_0|^2 = R^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z|^2 - 2\Re(z\bar{z_0}) + |z_0|^2 = R^2.$$

Mudando para a variável

$$w = \mathscr{R}_{C_1}(z) = z/|z|^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad w\,|z|^2 = z$$

a equação transforma-se em:

$$1 - 2\Re(w\bar{z_0}) + |w|^2|z_0|^2 = R^2|w|^2,$$

o que mostra ser uma circunferência na variável w. No caso $R = |z_0|$ obtemos uma recta! O caso em que D é uma recta é análogo. □

1.7. Problemas

1.1 Determine uma equação cartesiana e uma parametrização para a recta que passa nos pontos $(2,1)$ e $(-1,3)$. Quais dos pontos $(0,0)$, $(\frac{7}{2},0)$, $(-2,4)$ pertencem a essa recta? Parametrize a recta paralela a esta que contém origem.

1.2 Determine uma parametrização $(x(t),y(t))$ da recta $x+\frac{\sqrt{5}}{2}y=\frac{3}{2}$; determine os vectores tangentes e ortogonais a esta recta.

1.3 Mostre que as rectas dadas por $3y+x=4$ e $x+5-4y=0$ não são paralelas e determine o ponto de intersecção das duas.

1.4 Determine a distância da recta $x-2y=3$ ao ponto $(1,2)$; determine a equação da recta ortogonal a esta que passa no ponto $(3,0)$.

1.5 Seja L a recta dada pela equação $3x-2y=5$. Determine o ponto da recta L que está mais perto do ponto $p=(3,4)$.

1.6 Sendo P_L a aplicação projecção ortogonal relativa a L, e sendo L e L' duas rectas concorrentes, mostre que a operação iterada $(P_L \circ P_{L'})^n,\ n\in\mathbb{N}$ tem limite quando $n\to\infty$, e que esse limite é o ponto de intersecção $L\cap L'$.

1.7 Considere as duas rectas dadas por $a_1x+a_2y+a_3=0$ e $b_1x+b_2y+b_3=0$, com $||(a_1,a_2)||=||(b_1,b_2)||=1$. Mostre que o ângulo $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ entre elas é dado por:

$$\theta=\arcsin\left(|a_1b_2-b_1a_2|\right).$$

1.8 Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dois vectores não nulos, correspondentes aos números complexos z, w respectivamente. Mostre que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes se e só se $\Im(z/w)\neq 0$.

1.9 Mostre que qualquer recta pode ser parametrizada por uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ da forma $f(t)=at+b$, com $a,b\in\mathbb{C}$ e $|a|=1$.

1.10 Mostre que a intersecção de um número finito de semiplanos (fechados) é um conjunto convexo.

1.11 Deduza a fórmula da soma dos ângulos internos num polígono convexo com n lados ($(n-2)\pi$).

1.12 Sejam $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ três vectores distintos de $\mathbb{R}^2$. Mostre que o conjunto

$$\left\{a\mathbf{v}_1+b\mathbf{v}_2+c\mathbf{v}_3 : a+b+c=1,\ a,b,c\in[0,1]\subset\mathbb{R}\right\}$$

é o triângulo com vértices em $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.

1.13 Mostre que qualquer polígono convexo no plano, com n lados, é a união de $n-2$ triângulos $T_1,\cdots,T_{n-2}$, e que podemos ordená-los de forma a que

$$\cup_{i=1}^{k}T_i,$$

é também um polígono convexo, para todo o $k=1,\cdots,n-2$.

1.14 Verifique que a seguinte equação define uma parábola e determine o seu vértice e foco: $y^2+2y+12x+25=0$.

1.15 Verifique que a seguinte equação define uma elípse e determine os seus vértices, focos e excentricidade: $9x^2-18x+4y^2=27$.

1.16 Verifique que a seguinte equação define uma hipérbole e determine os seus vértices, focos e assímptotas: $2y^2-3x^2-4y+12x+8=0$.

1.17 Mostre que $h(t)=(a\cosh t,\ b\sinh t)\in\mathbb{R}^2$, com $a,b>0$ fixos, e $t\in\mathbb{R}$ é a parametrização de uma hipérbole. Determine os seus focos, e assímptotas em termos de a,b.

1.18 Mostre que $g(t)=ae^{it}+be^{-it}\in\mathbb{C}$, com $a>b>0$ fixos, e $t\in\mathbb{R}$ parametriza uma elípse com centro na origem. Determine os seus focos, em termos de a,b.

1.19 Sejam C_1 e C_2 duas circunferências que se intersectam em 2 pontos. Mostre que a recta que esses dois pontos definem é ortogonal ao segmento que une os centros de C_1 e C_2.

1.20 Identifique cada uma das seguintes cónicas, de acordo com o parâmetro $a\in\mathbb{R}$. Indique para que valores de a a cónica é degenerada.

(a) $x^2-y^2+4x-6y=a$

(b) $x^2+y^2+ax-6y=1$
(c) $x^2-2xy-y+x=a$

1.21 (a) Verifique que o conjunto das rotações lineares é um grupo, mostrando as igualdades:

$$R_\theta \circ R_\phi = R_\phi \circ R_\theta = R_{\theta+\phi}, \qquad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$

para quaisquer $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, usando matrizes 2×2. (b) Dados $p, q \in \mathbb{R}^2$, prove que a equação $R_\theta(p) = q$ tem solução $\theta \in \mathbb{R}$ se e só se $||p|| = ||q||$.

1.22 Seja F uma isometria que é uma transformação linear. Mostre que F preserva produtos internos, ou seja $F(\mathbf{v})\cdot F(\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, $\forall\, \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. Encontre uma isometria directa que *não preserva* os produtos internos.

1.23 Mostre que uma transformação $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ da forma $f(z) = az + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$ é uma isometria directa se e só se $|a| = 1$. Mostre que f é uma rotação em torno do ponto

$$z_0 = \frac{b}{1-a},$$

excepto no caso em que $a = 1$ (e que neste caso, $f(z)$ é uma translacção).

1.24 Prove que quaisquer isometria *indirecta* pode ser escrita como $g(z) = a\bar{z} + b$, para alguns valores de $b \in \mathbb{C}$ e $|a| = 1$.

1.25 Verifique que são isometrias e determine os pontos fixos das transformações $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $f(z) = 3 - iz$ e $g(z) = \bar{z} + 1 - 2i$. Classifique f e g.

1.26 Determine e classifique todas as isometrias $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $F(-1,0) = (0,2)$ e $F(0,2) = (2,1)$, indicando as suas representações em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{C}$.

1.27 Seja L a recta $x + y = 0$. Determine e classifique todas as isometrias directas $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $G(L)$ é o eixo dos xx. Indique as suas representações em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{C}$.

1.28 Seja F uma isometria distinta da identidade. Mostre que: (a) F fixa apenas 1 ponto se e só se F é uma rotação (b) F fixa uma recta se e só se é uma reflexão através dessa recta.

1.29 Determine uma semelhança F que envia os pontos $-1, 1 \in \mathbb{C}$ em $0, i \in \mathbb{C}$, ou seja $F(-1) = 0$ e $F(1) = i$. Existe outra com as mesmas propriedades?

1.30 Encontre uma semelhança que envia o triplo (ordenado) de pontos $(0; 4; 4+3i)$ no triplo $(3+8i; 3; -3)$. Esta semelhança é única?

1.31 Determine uma expressão geral para as semelhanças em $\mathbb{C}$ que preservam a recta real.

1.32 Mostre que as semelhanças preservam o tipo das cónicas. Mais precisamente, se C é uma elipse (parábola, hipérbole, resp.), mostre que $F(C)$ é uma elipse (parábola, hipérbole, resp.), sendo F uma semelhança.

1.33 Seja $\mathscr{I}_2$ a reflexão na circunferência centrada de raio 2. Determine o conjunto $\mathscr{I}_2(L)$ onde L é a recta dada por $x = 1$.

1.34 Seja $\mathscr{I}_1$ a reflexão na circunferência centrada de raio 1. Mostre que $\mathscr{I}_1$ preserva a circunferência dada por $|z-2| = \sqrt{3}$.

CAPíTULO 2

Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica

Para estudar a geometria esférica, vamos considerar o seu modelo mais simples, a **esfera unitária** S^2. Esta é a esfera de raio 1 centrada na origem de $\mathbb{R}^3$, espaço que doravante descrevemos nas coordenadas (x_1, x_2, x_3):

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Muitas das propriedades desta esfera provêm de considerar propriedades do espaço $\mathbb{R}^3$, após restringi-las adequadamente ao subconjunto S^2.

2.1. Rectas e distâncias na esfera

No estudo da geometria esférica é fundamental a consideração de planos e rectas em $\mathbb{R}^3$. Veremos que também são importantes as isometrias de $\mathbb{R}^3$, mas apenas as *lineares*.

2.1.1. Rectas, planos e isometrias lineares em $\mathbb{R}^3$. De forma equivalente ao caso de rectas em $\mathbb{R}^2$, um *plano* em $\mathbb{R}^3$ é dado pela equação Cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

em que $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ representa, agora, a origem em $\mathbb{R}^3$. Este plano passa pela origem se e só se $d = 0$. Em todo o caso, o vector (a, b, c) é *ortogonal* ao plano dado.

Tal como no plano $\mathbb{R}^2$, uma recta L pode ser parametrizada quando temos um ponto por onde ela passa $p = (p_1, p_2, p_3)$, e um vector direcção não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$L = p\,\langle \mathbf{v} \rangle := \{p + t\mathbf{v} : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Alternativamente, uma recta em $\mathbb{R}^3$ pode ser definida como a intersecção de dois planos *concorrentes*. Mais precisamente, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.1. Sejam $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ e $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d = 0$ as equações de dois planos $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}'$ distintos. Se a intersecção $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ é uma recta (se o conjunto de soluções simultâneas (x_1, x_2, x_3) em $\mathbb{R}^3$ das duas equações:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d &= 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d &= 0, \end{cases}$$

representa uma recta), estes dois planos chamam-se **concorrentes**. Caso contrário, os planos dizem-se **paralelos**.

A seguinte Proposição mostra que não há outras opções para a intersecção de dois planos além das indicadas acima, e demonstra-se de forma análoga ao Teorema 1.26.

PROPOSIÇÃO 2.2. *Dois planos dados por $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ e $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0$ são concorrentes se e só se a matriz*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

tem característica 2.

Da mesma forma que no plano, deduz-se a fórmula para a distância de um ponto a um plano em $\mathbb{R}^3$ (ver Teorema 1.29).

LEMA 2.3. *A distância do ponto* $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ *ao plano* $\mathscr{P} = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}$ *é dada por*

$$d(p, \mathscr{P}) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

EXERCÍCIO 2.4. Faça a demonstração do Lema anterior, baseando-se na do Teorema 1.29.

Vamos agora considerar as *isometrias lineares* de $\mathbb{R}^3$. Estas estão associadas a rectas e planos que passam na origem de forma que, por conveniência, adoptamos a seguinte terminologia.

DEFINIÇÃO 2.5. Uma **recta homogénea** (resp. **plano homogéneo**) em $\mathbb{R}^3$ é um subespaço linear de dimensão 1 (resp. 2) de $\mathbb{R}^3$, ou seja uma recta (resp. plano) que contém a origem.

Geometricamente, uma rotação (linear) em $\mathbb{R}^3$ corresponde à escolha de um eixo - uma recta homogénea - e um ângulo de rotação em torno desse eixo. Uma reflexão linear é a reflexão através de um dado plano homogéneo. Desta forma, estas rotações e as reflexões são isometrias de $\mathbb{R}^3$ e correspondem a transformações lineares ortogonais $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pois preservam o produto interno (e a norma) neste espaço vectorial.

Recorde-se que, uma transformação *ortogonal* de $\mathbb{R}^3$ é uma transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que preserva o produto interno canónico:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1, v_2, v_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$$

cuja matriz (também denotada por A) verifica $A^t A = I_3$, sendo I_3 é a matriz identidade 3×3, pelo que $\det A = \pm 1$. Assim, as transformações ortogonais são isometrias, e o recíproco também é válido para isometrias lineares.

EXERCÍCIO 2.6. Mostre que qualquer isometria *linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada como $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ onde A é uma matriz ortogonal, de forma análoga ao Teorema 1.71.

Léxico Como no caso do plano, diz-se que A é isometria **directa** ou **indirecta**, consoante o sinal de $\det A$.

PROPOSIÇÃO 2.7. *Qualquer isometria linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *preserva um plano homogéneo e a recta homogénea ortogonal a ele. Se* F *é directa, então* F *é uma rotação.*

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com o exercício anterior, a isometria linear é dada por uma matriz ortogonal A. Sendo uma matriz real 3×3, A tem (pelo menos) um valor próprio real λ, porque o seu polinómio característico é de grau 3. Mas se $\mathbf{v}$ é um vector próprio, então $||A\mathbf{v}|| = ||\lambda\mathbf{v}|| = |\lambda|\,||\mathbf{v}||$, o que implica que $|\lambda| = 1$ pois A é uma isometria. Logo preserva a recta homogénea L do espaço próprio de $\mathbf{v}$. Da mesma forma, preserva o espaço ortogonal, um plano homogéneo $\mathscr{P} = L^{\perp}$(dimensão 2). Temos então 2 casos: ou $\lambda = 1$, e A fixa toda a recta $L = \langle \mathbf{v} \rangle$, ou $\lambda = -1$ e $A(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Em ambos os casos, a restrição a $\mathscr{P}$, $B := A|_{\mathscr{P}}$ é uma isometria linear do plano $\mathscr{P}$, pelo que é uma rotação em torno da origem ou uma reflexão através de recta homogénea. Deixamos ao leitor a conclusão da demonstração. □

Concluímos que uma rotação não trivial em $\mathbb{R}^3$ fixa uma recta homogénea e uma reflexão fixa um plano. O recíproco também é verdade.

COROLÁRIO 2.8. *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *uma isometria linear que fixa dois vectores* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *com* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq 0$. *Então, se* F *é directa,* F *é a identidade; se* F *é indirecta,* F *é a reflexão através do plano gerado por* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vectores não nulos que definem um único plano homogéneo $\mathscr{P}$ (gerado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, ortogonal a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$). Assim, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por uma matriz ortogonal A que tem $\mathscr{P}$ como espaço fixo (Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vectores próprios linearmente independentes com o mesmo valor próprio 1, então qualquer combinação linear também é vector próprio no mesmo espaço próprio). Assim, a recta homogénea $L = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$ ortogonal a $\mathscr{P}$ também é preservada por F, e o determinante $\det A$ é igual ao valor próprio do espaço próprio L. Portanto, se $\det A = 1$, F é a identidade, se $\det A = -1$, temos um único valor próprio -1 que corresponde á reflexão pretendida. □

É importante notar que nem todas as isometrias lineares de $\mathbb{R}^3$ fixam uma recta ou um plano, como indica o seguinte exercício.

EXERCÍCIO 2.9. Determine uma isometria linear de $\mathbb{R}^3$ que apenas fixa a origem.

2.1.2. Distâncias e rectas na esfera. Na esfera, o caminho percorrido entre 2 pontos distintos p e q não coincide com a norma $||p-q||$ definida em $\mathbb{R}^3$, porque o segmento de recta entre os dois pontos passa pelo "interior" da esfera. Quando os pontos estão muito próximos, esta norma pode ser considerada uma aproximação à distância entre os dois pontos na esfera, mas a distância torna-se muito diferente de $||p-q||$ à medida que os pontos se afastam. Assim, a distância em S^2 pode ser expressa em termos de ângulos.

DEFINIÇÃO 2.10. A **distância angular** entre 2 pontos $p,q \in S^2$ é o ângulo (não orientado e entre 0 e π, inclusivé) entre eles, considerados como vectores unitários.

Notação Para distinguir da noção de distância em $\mathbb{R}^3$ escrevemos $d_{S^2}(p,q)$ para a distância angular entre os pontos $p,q \in S^2$.

Uma vez que são vectores unitários em $\mathbb{R}^3$, o produto interno entre dois pontos de S^2, coincide com coseno do ângulo θ entre eles: $p \cdot q = ||p||\,||q|| \cos\theta = \cos\theta$, pelo que obtemos:

$$d_{S^2}(p,q) = \arccos(p \cdot q).$$

Podemos relationar a norma em $\mathbb{R}^3$ com a distância angular da seguinte forma.

PROPOSIÇÃO 2.11. *Sejam $p,q \in S^2$. Então:*

$$||p-q|| = 2\sin\left(\frac{1}{2}\,d_{S^2}(p,q)\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\arccos(p\cdot q)\right).$$

DEMONSTRAÇÃO. Os segmentos de recta que unem p, q e a origem formam um triângulo isosceles. Dividindo esse triângulo em dois triângulos rectângulos e usando um pouco de trigonometria elementar deduz-se a fórmula. □

A noção de *circunferência* em S^2 é análoga à do plano.

DEFINIÇÃO 2.12. Uma **circunferência em** S^2 centrada em $p \in S^2$ é o conjunto de pontos que distam de p um dado valor $r > 0$ fixo.

Passemos à definição de *rectas* e *pontos antípodas em* S^2. Note que a intersecção de uma recta homogénea com S^2 consiste exactamente em 2 pontos.

DEFINIÇÃO 2.13. Uma **recta** de S^2 (também designada por **recta esférica** ou **círculo máximo**) é a intersecção de um plano homogéneo com S^2. Sendo $p \in S^2$, o ponto **antípoda** de p é o outro ponto de intersecção de S^2 com a única recta homogénea que contém p.

A intersecção entre a esfera unitária S^2 e um plano de $\mathbb{R}^3$ pode também ser apenas um ponto ou o conjunto vazio. A intersecção entre S^2 e uma recta em $\mathbb{R}^3$ consiste em dois pontos, em geral, mas também pode ser um só ponto ou o conjunto vazio.

EXERCÍCIO 2.14. Mostre que qualquer intersecção de um plano em $\mathbb{R}^3$ com S^2 é uma circunferência em S^2 e que esta é uma recta de S^2 se e só se o plano é homogéneo.

PROPOSIÇÃO 2.15. *Quaisquer 2 rectas distintas em S^2 intersectam-se em exactamente dois pontos antípodas.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do facto de que a intersecção de 2 planos homogéneos é uma recta homogénea. Os detalhes deixam-se para o leitor. □

LEMA 2.16. *Sejam p,q pontos distintos de $\mathbb{R}^3$. O conjunto de pontos no espaço equidistantes de p e q é um plano.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é análoga ao caso das rectas no plano (Teorema 1.21). Basta resolver, fixados $p \neq q$ em $\mathbb{R}^3$, a equação $||p-x||^2 = ||q-x||^2$ em relação a $x = (x_1, x_2, x_3)$ e verificar que é uma equação linear (os termos em x_i^2 cancelam, $i = 1, 2, 3$). □

EXERCÍCIO 2.17. Mostre que, por dois pontos distintos e não antípodas $p, q \in S^2$ passa uma e uma só recta esférica. O que se passa se p e q são antípodas?

PROPOSIÇÃO 2.18. *Sejam p, q pontos distintos de S^2. O conjunto de pontos no espaço equidistantes de p e q é uma recta de S^2.*

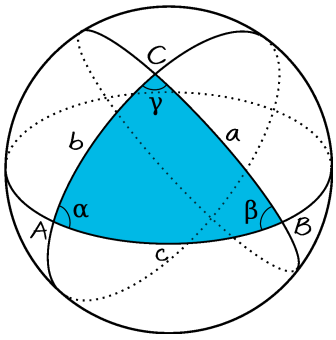
DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 2.16, notando que com $p, q \in S^2$ os termos constantes na equação $||p-x||^2 = ||q-x||^2$ cancelam também, pois são iguais a $||p||^2 = ||q||^2 = 1$, o que nos dá um plano homogéneo. □

2.1.3. Ângulos, triângulos e áreas. Esta subsecção é mais descritiva que as restantes, pretendendo-se apenas fornecer uma ideia geral das propriedades dos triângulos esféricos e das respectivas áreas que diferem do caso do plano. Na esfera, a forma de medir ângulos é essencialmente a mesma que no plano. Por exemplo, dados dois círculos máximos que se intersectam nos pólos norte e sul, o ângulo entre estas rectas esféricas é o ângulo das suas projecções no plano horizontal, que são segmentos de recta no plano. Uma vez que, por uma rotação, qualquer ponto se pode colocar no polo norte, esta definição serve para quaisquer duas rectas em S^2.

Seja A a área da esfera (sabemos que tendo raio 1, S^2 tem $A = 4\pi$, embora este valor não seja estritamente necessário para o que se segue). Por uma regra de proporcionalidade ("regra de três simples"), a àrea de um sector esférico entre duas rectas, que fazem ângulo $\theta \in [0, \pi]$ entre si é igual a:

$$A_\theta = \frac{A\theta}{2\pi}.$$

Consideramos agora um triângulo esférico, ou seja um subconjunto de S^2 limitado por 3 rectas de S^2, como na figura.



Note-se que estas 3 rectas dividem a esfera em 8 partes, cada uma sendo um triângulo esférico, e que estes são iguais dois a dois (os triângulos antípodas). Temos então o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.19. *A área de um triângulo esférico T relaciona-se com os respectivos ângulos internos α, β, γ pela equação:*

$$area(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

DEMONSTRAÇÃO. Chamemos T_α, T_β e T_γ aos triângulos opostos aos ângulos α, β e γ, respectivamente. Então temos:

$$\text{area}(T) + \text{area}(T_\alpha) = \frac{A}{2\pi}\alpha$$

e da mesma forma: $\text{area}(T) + \text{area}(T_\beta) = \frac{A}{2\pi}\beta$ e $\text{area}(T) + \text{area}(T_\gamma) = \frac{A}{2\pi}\gamma$. Por outro lado, como estes triângulos são iguais dois a dois:

$$\text{area}(T) + \text{area}(T_\alpha) + \text{area}(T_\beta) + \text{area}(T_\gamma) = \frac{A}{2}.$$

Assim, substituindo $\text{area}(T_\alpha) = \frac{A}{2\pi}\alpha - \text{area}(T)$, etc, obtemos

$$-2\text{area}(T) + \frac{A}{2\pi}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{A}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \text{area}(T) = \frac{A}{4\pi}(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{A}{4},$$

como pretendido, pois $A = 4\pi$. □

COROLÁRIO 2.20. *A soma dos ângulos internos dos triângulos esféricos é superior a π e determina a respectiva área.*

À laia de conclusão desta secção, encontrámos já 3 propriedades da geometria esférica que são fundamentalmente diferentes da geometria do plano:

- O conjunto de todas as distâncias entre dois pontos é *limitado*;
- Não há duas rectas (de S^2) distintas que sejam *paralelas* (no sentido em que a intersecção é não vazia).
- A soma dos ângulos internos dos triângulos é superior a π e só depende da respectiva àrea.

2.2. Isometrias da esfera

Tal como as isometrias no plano e no espaço são transformações que preservam distâncias, as isometrias da esfera S^2 são definidas da mesma forma.

DEFINIÇÃO 2.21. Uma isometria da esfera S^2, ou **isometria esférica**, é uma transformação $f : S^2 \to S^2$ (portanto f é bijectiva) que preserva distâncias entre pares de pontos, ou seja $||f(p) - f(q)|| = ||p - q||$ para todos os pontos $p, q \in S^2$.

Os primeiros exemplos de isometrias esféricas são rotações e as reflexões. Na esfera não existe análogo de translações, o que de certa forma facilita o seu estudo, pois todas estas isometrias serão lineares.

As rotações na esfera S^2 são definidas como restrições de rotações (lineares) em $\mathbb{R}^3$.

DEFINIÇÃO 2.22. Uma **rotação de** S^2 é a restrição a S^2 de uma rotação linear em $\mathbb{R}^3$.

De forma equivalente, pela Proposição 2.7, uma rotação de S^3 é a restrição a S^2 de uma aplicação linear ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $\det T = 1$.

LEMA 2.23. *Se uma rotação $R : S^2 \to S^2$ fixa dois pontos distintos e não antípodas, então R é a identidade.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do facto de que uma rotação não trivial apenas fixa um par de pontos antípodas, o que por sua vez segue do facto de uma rotação (não trivial) de $\mathbb{R}^3$ apenas fixa o seu eixo de rotação (pelo Corolário 2.8 se uma isometria directa fixa dois pontos não antípodas, corresponde a vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq 0$, é a identidade). □

PROPOSIÇÃO 2.24. *A composição de rotações de S^2 é uma rotação de S^2.*

DEMONSTRAÇÃO. Isto segue do facto de que a composição de matrizes ortogonais é ortogonal: Se $A^tA = B^tB = I$ então $(AB)^tAB = I$. Além disso, $\det AB = \det A \cdot \det B$. □

EXEMPLO 2.25. Há três rotações especiais, por terem eixos coincidentes com os eixos coordenados. Temos assim:

$$R_{1,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; R_{2,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \; R_{3,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

representam rotações em torno dos eixo x_1, x_2, x_3, respectivamente, de ângulo $\theta \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que estas são matrizes ortogonais.

TEOREMA 2.26. *Qualquer rotação pode ser escrita como composição da forma $R_{2,\theta} \circ R_{3,\phi} \circ R_{2,\psi}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideramos os pontos $p_0 = (1,0,0)$ e $q_0 = (0,1,0)$ e sejam $p, q \in S^2$ as suas imagens por R. Agora enviamos, por R_2, q no equador, obtendo q'. Depois, por R_3, colocamos q' em q_0 (e p foi parar a p'). Finalmente, por R_2 (que fixa q_0) enviamos p' em p_0. Seja S a composição que obtivémos. Então $S \circ R$ fixa 2 pontos, p_0 e q_0 não antípodas, pelo que é trivial (Proposição 2.23). Logo $R = S^{-1}$ é da forma pretendida. □

Os ângulos θ, ϕ e ψ deste resultado chamam-se *ângulos de Euler* da rotação.

PROPOSIÇÃO 2.27. *[Transitividade] Sejam dados dois pares de pontos distintos $p, q \in S^2$ e $p', q' \in S^2$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) Existe uma rotação $R : S^2 \to S^2$ que verifica $R(p) = p'$ e $R(q) = q'$
(b) A distância entre p e q é igual à distância entre p' e q'.
(c) $p \cdot q = p' \cdot q'$.

DEMONSTRAÇÃO. A equivalência entre (b) e (c) segue da Proposição 2.11. Como R é uma isometria, se as distâncias não coincidem, não pode existir tal R, pelo que (a) implica (b). Agora, se p e q são distintos e não são antípodas $(u, v) := (p, \frac{q-(p\cdot q)p}{||q-(p\cdot q)p||})$ é um par ortonormado (e orientado no sentido directo) (mostre que $u \cdot v = 0$). Fazendo $w = u \times v$ obtemos base ortonormada (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$. A matriz S com colunas (u, v, w) envia a base canónica na base (u, v, w). De igual forma, há uma matriz S' com (u', v', w') definida de forma análoga com p', q' em lugar de p,q e que envia a base canónica em (u', v', w'). Finalmente, temos que $R := S' \circ S^{-1}$ é a rotação prentendida (é imediato que $R(p) = R(u) = u' = p'$ e deixamos ao leitor a verificação que $R(q) = q'$). □

2.2.1. Reflexões. Da mesma forma que para as rotações da esfera, as reflexões em S^2 são obtidas por restrição à esfera de reflexões em $\mathbb{R}^3$ através de planos homogéneos.

DEFINIÇÃO 2.28. A **reflexão de** S^2 através do círculo máximo $L \subset S^2$ (recta em S^2), denotada por $\mathscr{R}_L$, é a restrição da reflexão em $\mathbb{R}^3$ através do plano homogéneo $\mathscr{P}_L$ que contém L.

LEMA 2.29. *Seja $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ o plano homogéneo $\mathscr{P}_L$, que define L, e $\mathbf{v} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$ (vector ortogonal a $\mathscr{P}_L$). Então, temos:*

$$\mathscr{R}_L(p) = p - 2\frac{p \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v},$$

ou ainda $\mathscr{R}_L(p) = p - 2(p \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$, no caso em que $\mathbf{v}$ é unitário.

DEMONSTRAÇÃO. Basta ver que a mesma fórmula é válida para reflexões lineares em $\mathbb{R}^3$ e que $\mathscr{R}_L$ fixa L (uma vez que $p \in L$ equivale a $p \cdot \mathbf{v} = 0$). □

PROPOSIÇÃO 2.30. *Seja T a composição de duas reflexões de S^2, relativas a C_1 e a C_2 (dois círculos máximos). Então T é uma rotação em torno do eixo definido pelos pontos antípodas onde os dois círculos máximos se intersectam. Além disso o ângulo de rotação é o dobro do ângulo entre os 2 círculos máximos.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue a mesma demonstração no caso de rotações no plano em torno da origem, projectando a rotação no plano ortogonal ao eixo de rotação. □

EXERCÍCIO 2.31. Seja T uma isometria de S^2 que fixa dois pontos distintos que não são antípodas. Mostre que, se T é indirecta, então T é a reflexão através da (única) recta que passa em p e q [Sugestão: Use o Corolário 2.8].

O estudo de isometrias já efectuado, pode ser resumido no seguinte enunciado.

TEOREMA 2.32. *Todas as isometrias de S^2 são restrições de* isometrias lineares *em $\mathbb{R}^3$. Se $F : S^2 \to S^2$ é uma isometria, então F é uma rotação (se é directa) ou uma composição de uma ou três reflexões (se é indirecta). Em particular, A composição de rotações e reflexões segue a tabela da Proposição 1.87.*

DEMONSTRAÇÃO. A primeira frase segue da definição de isometria de S^2 (de facto, o resultado é ainda mais forte: existe uma bijecção entre o grupo das isometrias lineares de $\mathbb{R}^3$ e o grupo das isometrias de S^2). Assim, isometrias de S^2 são composições de rotações e reflexões lineares. A

composição de rotações é uma rotação, pelo que a composição de qualquer número par de reflexões é uma rotação. Falta apenas ver que a composição de reflexões em número ímpar maior que 3 pode ser reduzida a uma composição de 1 ou 3 reflexões, o que se deixa para o leitor. □

2.3. Projecção estereográfica e coordenadas complexas

A projecção estereográfica representa um método para trabalhar com a esfera unitária usando apenas construções e conceitos no plano. Além disso, como veremos, a representação de isometrias com coordenadas complexas torna-se muito útil.

2.3.1. Projecção estereográfica.

DEFINIÇÃO 2.33. Seja N o *pólo norte*, ou seja o ponto $N = (0,0,1) \in S^2$. A projecção estereográfica (a partir do pólo norte) é a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : S^2 \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{1}{1-x_3}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Podemos verificar que φ é bijectiva e determinar a fórmula da sua inversa.

EXERCÍCIO 2.34. Verifique a fórmula da aplicação inversa:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\to S^2 \setminus \{N\} \\ (u,v) &\mapsto \frac{1}{u^2+v^2+1}\left(2u, 2v, u^2+v^2-1\right) \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2.35. *A projecção estereográfica envia circunferências de S^2 (incluindo as rectas) em circunferências ou em rectas de $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, seja C uma circunferência de S^2. Se $N \in C$, $\varphi(C)$ é uma recta em $\mathbb{R}^2$, caso contrário, $\varphi(C)$ é uma circunferência em $\mathbb{R}^2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Cada circunferência em S^2 é a intersecção de um plano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ com S^2, de equação $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Fazendo $(x_1, x_2) = (1 - x_3)(u, v) = \frac{2}{u^2+v^2+1}(u, v)$ com u, v coordenadas no plano, pelo exercício anterior, a equação do plano escreve-se (eliminando o z):

$$2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) + d(u^2 + v^2 + 1) = 0$$

o que (pela classificação das cónicas) representa uma circunferência quando $c + d \neq 0$ e uma recta quando $c + d = 0$. Note-se que $c + d = 0$ precisamente quando o plano passa no ponto $N = (0,0,1)$. □

EXERCÍCIO 2.36. Seja $\alpha \in]0,1[$. Mostre que a *imagem* por φ da circunferência parametrizada $(x_1, x_2, x_3) = (r\cos t, y_0, r\sin t)$ tem equação: $u^2 + (v - \frac{1}{\alpha})^2 = \frac{1}{\alpha^2}(1 - \alpha^2)$. [Sugestão: a equação do plano $x_2 = \alpha$ tem $a = c = 0$, $b = 1$, $d = -\alpha$ e aplique a fórmula da proposição acima].

A projecção estereográfica relaciona de forma simples os pontos obtidos por reflexão através do equador.

EXERCÍCIO 2.37. Sejam $p \in S^2$ e $p' = \mathscr{R}_L(p)$ onde L é o equador de S^2. Mostre que a reflexão (no plano $\mathbb{C}$) de $\varphi(p)$ através da circunferência unitária $|z| = 1$ é precisamente $\varphi(p')$.

2.3.2. A esfera de Riemann e as suas isometrias. Uma forma mais geral de olhar a relação da projecção estereográfica com as coordenadas complexas é considerar que o plano complexo tem um ponto adicional, a que chamamos **infinito** que corresponde ao pólo norte em S^2.[1] Desta forma, consideramos o *plano complexo estendido* $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$, e a projecção estereográfica φ pode igualmente estender-se a toda a esfera de forma a que:

$$\varphi : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$$

[1] É importante salientar que, ao contrário do caso real, este infinito é único, sendo equivalente "ir para o infinito" em qualquer direcção.

seja uma bijecção. Mais ainda, podemos declarar que φ é uma função contínua determinando que a topologia em $\mathbb{C}_\infty$ é tal que os seus conjuntos abertos são aqueles cuja imagem inversa por φ são abertos em S^2. Pode então provar-se que φ é, além disso, um homeomorfismo (função contínua bijectiva cuja inversa é também contínua) pelo que, para todos os efeitos, S^2 e $\mathbb{C}_\infty$ são representações distintas do *mesmo objecto geométrico* que, neste contexto, se chama *a esfera de Riemann*.

Esta noção permite-nos escrever as isometrias de S^2 em coordenadas complexas, ao considerarmos que a expressão de uma transformação $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ corresponde, através da projecção estereográfica, a uma isometria F de S^2 em si mesma. De facto, estamos a considerar a composição indicada no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{F} & S^2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{C}_\infty & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_\infty, \end{array}$$

ou seja $f = \varphi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Na prática, a expressão de $f = f(w)$ obtém-se relacionando as variáveis $w = u + iv$ com (x_1, x_2, x_3) através da fórmula da projecção estrereográfica.

EXEMPLO 2.38. A rotação de ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ em torno do eixo vertical x_3 é dada por

$$R_3(w) = e^{i\theta} w,$$

uma vez que, nas variáveis de $\mathbb{R}^3$ temos $R_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$ sendo $x_3 = x_3'$ pelo que (u', v') (as partes reais e imaginárias de $w' = R_3(w)$) relacionam-se com $(u, v) = (\Re w, \Im w)$ por uma rotação no plano $\mathbb{C}$, dada por multiplicação por $e^{i\theta}$.

Um segundo exemplo, rotações em torno do eixo x_2, levar-nos-á ao teorema 2.58 e a considerar as chamadas *transformações de Möbius*.

EXEMPLO 2.39. Em coordenadas complexas, qualquer rotação R_2 (em torno do eixo x_2) é da forma:

$$T(w) = \frac{aw - b}{bw + a},$$

para certo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. A demonstração deste facto necessita de alguns cálculos que se deixam para mais tarde. No entanto, podemos notar desde já que, nas condições dadas, temos:

$$T(i) = \frac{ai - b}{bi + a} = \frac{(ai - b)(-bi + a)}{a^2 + b^2} = \frac{ab - ba + a^2 i + b^2 i}{a^2 + b^2} = 0 + i.$$

(pois $a^2 + b^2 \neq 0$) e mesma forma, $T(-i) = -i$. Como é fácil ver que não há outros pontos fixos, se $T(w)$ é uma isometria, terá que ser uma rotação em torno do eixo x_2, pois $\varphi(0, \pm 1, 0) = \pm i$.

Pode relacionar-se explicitamente a distância euclideana entre 2 pontos da esfera e a distância dos respectivos pontos no plano complexo, após a projecção estereográfica φ.

PROPOSIÇÃO 2.40. *Consideremos os pontos $p, p' \in S^2$ e sejam $w = \varphi(p)$ e $w' = \varphi(p')$. Então temos*

$$||p - p'|| = \frac{2|w - w'|}{\sqrt{|w|^2 + 1}\sqrt{|w'|^2 + 1}}.$$

Notação Esta Proposição permite definir uma nova distância em $\mathbb{C}_\infty$, que chamamos **distância esférica** e denotamos por

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(w, w') := \frac{2|w - w'|}{\sqrt{|w|^2 + 1}\sqrt{|w'|^2 + 1}} = ||\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w')||.$$

COROLÁRIO 2.41. *Temos a seguinte relação entre distâncias, sendo $p.q \in S^2$:*

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(\varphi(p), \varphi(q)) = ||p - q|| = 2\sin(\frac{1}{2} d_{S^2}(p, q)).$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente da Definição de $d_{\mathbb{C}_\infty}$ e da fórmula 2.11. □

A Proposição 2.40 será mostrada no Apêndice, juntamente com uma outra fórmula envolvendo *transformações de Möbius* e a *razão cruzada*, os tópicos da próxima secção.

2.4. Transformações de Möbius

Do mesmo modo que as isometrias do plano admitem uma representação muito simples em coordenadas complexas, podemos agora usar a projecção estereográfica para apresentar as isometrias da esfera como transformações no plano complexo, de forma a generalizar a fórmula do Exemplo 2.39 a qualquer rotação e reflexão. Para isso, vamos introduzir as chamadas *transformações de Möbius* que são o quociente de duas semelhanças, pelo que são também designadas por *transformações lineares fraccionárias*.

2.4.1. Transformações de Möbius e matrizes invertíveis. Há uma relação importante entre estas transformações e o grupo das matrizes 2×2 invertíveis, com entradas complexas. Este grupo designa-se por $GL_2(\mathbb{C})$ e começamos por considerar a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}),$$

pelo que $\det A = ad - bc \neq 0$.

DEFINIÇÃO 2.42. Seja A a matriz acima. A **transformação de Möbius** associada a A é a aplicação

$$T_A(w) = \frac{aw + b}{cw + d}.$$

Uma transformação de Möbius é uma aplicação desta forma, para alguma matriz $A \in GL_2(\mathbb{C})$, ou seja, com $\det A = ad - bc \neq 0$.

OBSERVAÇÃO 2.43. (1) Note-se que o domínio de T_A é $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ e o contradomínio é $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, e que $T_A : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ é uma aplicação bijectiva. Vamos sempre assumir que as transformações de Möbius estão definidas, sem nos preocuparmos em explicitar o seu domínio ou contradomínio.

(2) Uma forma global de pensar nestas transformações, é entender a função $T(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$ como uma aplicação $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, de forma a que $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ e $T(\infty) = \frac{a}{c}$; além disto cada uma das fracções $-\frac{d}{c}$ e $\frac{a}{c}$ representa ∞ caso $c = 0$ (uma vez que $c = 0$ implica que a e d não são zero, dado que $ad - bc \neq 0$).

(3) Se tivermos $ad - bc = 0$, então não é difícil ver que as raizes dos dois polinómios $aw + b$ e $cw + d$ coincidem, o que faria com que $\frac{aw+b}{cw+d}$ se reduziria a uma constante. Por esta razão, exige-se sempre que $ad - bc \neq 0$.

PROPOSIÇÃO 2.44. *O conjunto das transformações de Möbius forma um grupo com a operação de composição de aplicações.*

DEMONSTRAÇÃO. A transformação de Möbius associada à matriz identidade é a aplicação identidade: $T_{I_2}(w) = w$, para qualquer $w \in \mathbb{C}$, como se verifica facilmente. A transformação de Möbius associada à matriz AB é a composição das correspondentes a A e a B, nesta ordem. De facto, mostra-se que

$$T_{AB}(w) = (T_A \circ T_B)(w), \quad \forall A, B \in GL_2(\mathbb{C}),\ \forall w \in \mathbb{C}$$

Da mesma forma transformação de Möbius associada à matriz A^{-1} é a inversa da transformação de Möbius associada à matriz A: $T_{A^{-1}}(w) = (T_A)^{-1}(w)$. Seja $SL_2(\mathbb{C})$ o subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ das matrizes de determinante igual a 1. □

PROPOSIÇÃO 2.45. *O grupo das transformações de Möbius é isomorfo a $SL_2(\mathbb{C})/\pm I_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. A associação de uma matriz de determinante 1 a uma transformação de Möbius, da forma indicada na Definição 2.42, é um homomorfismo de grupos, pela demonstração da Proposição anterior. Prova-se também que este homomorfismo é sobrejectivo e que o núcleo é o subgrupo $\pm I_2$. Assim, este resultado segue do teorema de isomorfismo de grupos. □

Notação O grupo das transformações de Möbius denota-se por $\mathbb{M}$.

Observe-se que o subgrupo $\{\pm I_2\}$ é precisamente o centro de $SL_2(\mathbb{C})$. O seguinte corolário segue imediatamente da Proposição anterior.

COROLÁRIO 2.46. *A aplicação natural $\pi : SL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}$ definida por $\pi(A) = T_A$, para $A \in SL_2(\mathbb{C})$ tem núcleo $\{\pm I_2\}$*

2.4.2. Classificação de transformações de Möbius. Nesta subsecção classificamos as transformações de Möbius por pontos fixos e estudamos a sua acção na esfera de Riemann. Começamos por ver que estas podem ser obtidas por composição de transformações já estudadas anteriormente - as semelhanças - juntando-lhes a *inversão*.

DEFINIÇÃO 2.47. A **inversão** é a transformação de Möbius $J(w) = \frac{1}{w}$.

PROPOSIÇÃO 2.48. *Qualquer transformação de Möbius é a composição de translacções, semelhanças lineares e a inversão.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$T(w) = \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{a}{c} + \frac{(\frac{bc-ad}{c^2})}{w+\frac{d}{c}},$$

então $T = T_{\frac{a}{c}} \circ M_\gamma \circ J \circ T_{\frac{d}{c}}$, onde $\gamma = \frac{1}{c^2}(bc-ad)$. □

COROLÁRIO 2.49. *Seja T uma transformação de Möbius. Então T envia circunferências em circunferências ou rectas, e rectas em circunferências ou rectas.*

DEMONSTRAÇÃO. É fácil de verificar que tanto as translações como as semelhanças enviam circunferências em circunferências e rectas em rectas. De acordo com a proposição anterior, basta então considerar o caso de J. A demonstração de que J envia circunferências ou rectas em circunferências ou rectas segue da Proposição 1.119 uma vez que $J(w) = \mathscr{R}_x \circ \mathscr{R}_{C_1}(w) = \mathscr{R}_x(\frac{1}{\bar{w}}) = \frac{1}{w}$, sendo $\mathscr{R}_{C_1}$ a reflexão através da circunferência unitária e $\mathscr{R}_x$ a reflexão através do eixo real, reflexões que gozam da propriedade em causa. □

PROPOSIÇÃO 2.50. *Qualquer $T \in \mathbb{M}$ diferente da identidade tem zero, um ou dois pontos fixos em $\mathbb{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. A determinação de pontos fixos equivale a resolver a equação $T(w) = w$ ou seja

$$\frac{aw+b}{cw+d} = w,$$

que equivale ao polinómio de segundo grau $cw^2+(d-a)w-b = 0$, que naturalmente tem 2 soluções, no caso geral; tem 1 solução quando o discriminante do polinómio se anulo ou quando $c = 0$; e não tem soluções quando $c = a-d = 0$, e $b \neq 0$ (que corresponde a translações). □

EXERCÍCIO 2.51. Mostre que uma transformação de Möbius diferente da identidade tem sempre pelo menos um ponto fixo em $\mathbb{C}_\infty$.

COROLÁRIO 2.52. *Se $T \in \mathbb{M}$ fixa 3 pontos distintos em $\mathbb{C}_\infty$, então é a identidade.*

As transformações de Möbius têm também uma noção de transitividade.

TEOREMA 2.53. *[Transitividade] Dados dois triplos de pontos distintos w_1, w_2, w_3 e w_1', w_2', w_3' existe uma única transformação de Möbius T que envia w_i em w_i'.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que existe uma única transformação que envia w_1, w_2, w_3 em $0, 1, \infty$. Essa transformação escreve-se

$$T(w) = \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}\frac{w_1-w}{w_3-w}.$$

Claramente $T(w_1) = 0$, $T(w_2) = 1$ e $T(w_3) = \infty$. T é a única transformação com estas propriedades uma vez que é determinada por um triplo de pontos (pelo Corolário 2.52). Da mesma forma, sendo T' a única transformação que envia w_1, w_2, w_3 em $0, 1, \infty$, concluímos que a transformação pretendida é $T \circ T'^{-1}$. □

2.4.3. A razão cruzada. Dados quatro pontos gerais em $\mathbb{C}_\infty$, há um número complexo que fica invariante quando aplicamos uma transformação de Möbius arbitrária. Este número chama-se razão cruzada (dos quatro pontos dados) e tem propriedades geométricas muito interessantes.

DEFINIÇÃO 2.54. Dados quatro pontos distintos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ definimos a **razão cruzada** entre eles como:

$$[a \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix} d] := \frac{a-b}{a-c}\frac{c-d}{b-d}.$$

Há uma forma única de estender a razão cruzada a 4 pontos na esfera de Riemann.

EXERCÍCIO 2.55. Indique como definir a razão cruzada entre quatro pontos distintos $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$.

COROLÁRIO 2.56. *A única transformação de Möbius que envia o triplo de pontos distintos w_0, w_1, w_∞ em $0, 1, \infty$ respectivamente é dada por:*

$$T(w) = [w_1 \begin{smallmatrix} w_\infty \\ w_0 \end{smallmatrix} w] = \frac{w_1 - w_\infty}{w_1 - w_0}\frac{w_0 - w}{w_\infty - w}$$

A propriedade mais importante da razão cruzada é a sua invariância pelo grupo $\mathbb{M}$.

TEOREMA 2.57. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{C}_\infty$ quatro pontos distintos na esfera de Riemann, e seja $T \in \mathbb{M}$ uma transformação de Möbius arbitrária. Então:*

$$[T(a) \begin{smallmatrix} T(b) \\ T(c) \end{smallmatrix} T(d)] = [a \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix} d].$$

DEMONSTRAÇÃO. Há várias demonstrações possíveis, e escolhemos uma que torna a relação evidente. Usando a composição de T em semelhanças e inversão, basta provar para cada um destes casos. De facto, se $T(w) = \alpha w + \beta$ ($\alpha \neq 0$) é uma semelhança, temos:

$$[T(a) \begin{smallmatrix} T(b) \\ T(c) \end{smallmatrix} T(d)] = \frac{\alpha a + \beta - (\alpha b + \beta)}{\alpha a + \beta - (\alpha c + \beta)}\frac{\alpha c + \beta - (\alpha d + \beta)}{\alpha b + \beta - (\alpha d + \beta)} = \frac{\alpha(a-b)}{\alpha(a-c)}\frac{\alpha(c-d)}{\alpha(b-d)} = [a \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix} d].$$

Da mesma forma, sendo $T(w) = \frac{1}{w}$, obtemos

$$[T(a) \begin{smallmatrix} T(b) \\ T(c) \end{smallmatrix} T(d)] = [\frac{1}{a} \begin{smallmatrix} \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{smallmatrix} \frac{1}{d}] = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{d}}\frac{abcd}{abcd} = \frac{b-a}{c-a}\frac{d-c}{d-b} = [a \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix} d],$$

como pretendido. □

2.4.4. Rotações e reflexões em coordenadas complexas. No exemplo 2.39, as rotações em torno do eixo dos y, em coordenadas complexas, assumem a forma de certas transformações de Möbius. O caso geral de rotação é também representado por transformações de Möbius que assumem uma forma particular.

TEOREMA 2.58. *[Gauss, ∼1820] As transformações da forma*

$$T(w) = \frac{aw - b}{\bar{b}w + \bar{a}},$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$ correspondem a isometrias directas de S^2 pelo que são rotações da esfera. Reciprocamente, qualquer rotação de S^2, em coordenadas complexas, se escreve nesta forma (e podemos assumir $|a|^2 + |b|^2 = 1$).

Léxico As transformações $T \in \mathbb{M}$ da forma usada no teorema de Gauss designam-se por **tranformações elípticas**. Assim, as transformações elípticas normalizadas são da forma:

$$T(w) = \frac{aw - b}{\bar{b}w + \bar{a}},$$

para certos $a, b \in \mathbb{C}$, com $|a|^2 + |b|^2 = 1$. As matrizes associadadas às transformações elípticas

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{C} \tag{3}$$

formam um grupo, chamado **grupo especial unitário** (de ordem 2) e denotado por $SU(2)$.

EXERCÍCIO 2.59. Mostre que as matrizes da forma indicada na Equação 3 formam um grupo, e que verificam $A^*A = I_2$ onde * desinga a operação de transposição e conjugação (de todas as entradas).

Para demonstrar o teorema de Gauss, começamos por verificar que a distância esférica é preservada por qualquer transformação elíptica.

PROPOSIÇÃO 2.60. *A distância esférica é preservada pelas transformações elípticas. Por outras palavras, se $A \in SU(2)$ (matriz especial unitária) então*

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(w, z) = d_{\mathbb{C}_\infty}(T_A(w), T_A(z)),$$

para todo $w, z \in \mathbb{C}_\infty$.

DEMONSTRAÇÃO. No Apêndice, mostra-se que a distância esférica $d_{\mathbb{C}_\infty}(z, w)$ é determinada por uma razão cruzada:

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(z, w)^2 = 4 \left| [w \begin{smallmatrix} z \\ w^* \end{smallmatrix} z^*] \right|$$

sendo w^*, z^* os correspondente pontos antípodas ($w^* = -1/\bar{w}$ e o mesmo para z^*). Por outro lado, sabemos que qualquer transformação de Möbius $T \in \mathbb{M}$ preserva a razão cruzada:

$$[w \begin{smallmatrix} z \\ w^* \end{smallmatrix} z^*] = [T(w) \begin{smallmatrix} T(z) \\ T(w^*) \end{smallmatrix} T(z^*)].$$

Assim o resultado fica demonstrado se provarmos que $T(w^*) = T(w)^*$ para $T = T_A$ com A uma matriz unitária. Isto é verdade porque, sendo $T(w) = \frac{aw-b}{\bar{b}w+\bar{a}}$ vem:

$$T(w)^* = \frac{1}{-\overline{T(w)}} = \frac{b\bar{w} + a}{-(\bar{a}\bar{w} - \bar{b})} = \frac{a(-\frac{1}{\bar{w}}) - b}{(-\frac{1}{\bar{w}})\bar{b} + \bar{a}} = T(-\frac{1}{\bar{w}}) = T(w^*),$$

como pretendido. □

Como caso particular, podemos finalizar o tratamento do Exemplo 2.39

LEMA 2.61. *Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e seja*

$$T_{(a,b)}(w) = \frac{aw - b}{bw + a}.$$

Então $T_{(a,b)}$ representa uma rotação de S^2 em torno do eixo x_2.

DEMONSTRAÇÃO. A matriz em causa é

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

em que podemos fazer $a^2 + b^2 = 1$ (sem afectar a transformação). Assim, temos um caso particular de uma matriz unitária, pelo que preserva a distância esférica, e portanto é uma isometria de S^2. Como esta transformação fixa os pontos $\pm i = \varphi(0, \pm 1, 0)$ (ver o Exemplo 2.39) esta representa uma rotação em torno do eixo x_2, que é a recta homogénea que intersecta S^2 nos pontos $(0, \pm 1, 0)$. □

Finalmente, completamos a demonstração do Teorema de Gauss.

DEMONSTRAÇÃO. Como a distância esférica é preservada por uma transformação elíptica, este tipo de transformações representa, em coordenadas complexas, uma isometria de S^2, pois:

$$||p - p'|| = d_{\mathbb{C}_\infty}(w, w') = d_{\mathbb{C}_\infty}(T(w), T(w')) = ||T(p) - T(q)||,$$

de acordo com o Corolário 2.41 (por definição $T(p) = \varphi^{-1}(T(w))$ e $T(p') = \varphi^{-1}(T(w'))$). A segunda afirmação segue do facto de todas as rotações serem composições de R_2 e R_3, pelo facto das transformações correspondentes $T_{(a,b)}$ e as $T_\gamma(w) = \gamma w$ ($|\gamma| = 1$) estarem associadas a matrizes unitárias, e pelo Exercício 2.59 as transformações deste tipo formam um grupo. □

EXERCÍCIO 2.62. Mostre directamente que qualquer transformação de Möbius elíptica $T(w) = \frac{aw-b}{\bar{b}w+\bar{a}}$ tem 2 pontos fixos *distintos* e são da forma w_0 e $-1/\bar{w_0}$, para certo $w_0 \in \mathbb{C}_\infty$.

O teorema de Gauss identifica as transformações de Möbius que representam rotações de S^2. Vamos agora completar o tratamento das isometrias em coordenadas complexas, considerando as reflexões. As reflexões na esfera correspondem, pela projecção estereográfica às reflexões no plano relativas a circunferências.

PROPOSIÇÃO 2.63. *Uma reflexão em S^2 corresponde a uma reflexão em $\mathbb{R}^2$ relativa a uma recta ou a uma circunferência. Mais precisamente, seja L uma recta de S^2 (um círculo máximo de S^2). Então $\mathscr{R}_L$ corresponde a $\mathscr{R}_{\varphi(L)}$.*

TEOREMA 2.64. *As reflexões de S^2 correspondem a tranformações indirectas da forma:*

$$T(w) = \frac{a\bar{w} - b}{\bar{b}\bar{w} + \bar{a}},$$

com $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$ (e podemos assumir $|a|^2 + |b|^2 = 1$).

DEMONSTRAÇÃO. Basta usar o facto de que qualquer reflexão se pode escrever como a reflexão no equador composta com uma rotação arbitrária. Note-se que a reflexão no equador corresponde à conjugação $w \mapsto \bar{w}$. □

Temos então a seguinte Tabela de classificação das isometrias em S^2:

orientação	tipo	pontos fixos	representação em $\mathbb{C}_\infty$
directa	trivial	todos	$T(w) = w$
directa	rotação	dois antípodas	$T(w) = \frac{aw-b}{\bar{b}w+\bar{a}}$
indirecta	reflexão	uma recta	$T(w) = \frac{a\bar{w}-b}{\bar{b}\bar{w}+\bar{a}}$

EXERCÍCIO 2.65. Mostre directamente que a composição $T \circ T'$ de duas transformações da forma $T(w) = \frac{a\bar{w}-b}{\bar{b}\bar{w}+\bar{a}}$ e $T'(w) = \frac{a'\bar{w}-b'}{\bar{b'}\bar{w}+\bar{a'}}$ é uma transformação de Möbius elíptica.

Estes resultados sugerem a definição de tranformações *anti-Möbius* (terminologia não standard) como as transformações geométricas da forma

$$T(w) = \frac{a\bar{w} + b}{c\bar{w} + d},$$

onde $ad - bc \neq 0$. Os métodos usados anteriormente aplicam-se de forma análoga a este tipo de transformações.

EXERCÍCIO 2.66. Verifique que a composição de duas transformações anti-Möbius é uma transformação de Möbius. Mostre que as transformações de Möbius e anti-Möbius formam um grupo de tranformações da esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ que preservam o conjunto de rectas e circunferências de $\mathbb{C}_\infty$.

2.5. O Plano Hiperbólico

O *plano hiperbólico* é uma das outra geometrias clássicas, em dimensão 2, com propriedades interessantes. Há vários modelos do plano hiperbólico: os modelos de Poincaré, Klein-Beltrami, Lorentz, etc, e todos são úteis em alguns aspectos. Vamos usar fundamentalmente o modelo do semiplano superior de Poincaré que se define como segue.

DEFINIÇÃO 2.67. O **plano hiperbólico** é o conjunto $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} : \Im w > 0\}$. Chamamos recta (hiperbólica) neste plano aos conjuntos:

- semi-recta vertical (aberta) (mais precisamente, a intersecção de uma recta vertical com $\mathbb{H}$)
- semi-circunferência de centro real (mais precisamente, conjunto da forma $\{x+iy \in \mathbb{H} \,|\, (x-x_0)^2 + y^2 = r^2\}$).

Note-se que as semi-circunferências de centro real intersectam o eixo real de forma ortogonal.

LEMA 2.68. *Por cada par de pontos distintos de $\mathbb{H}$ passa uma e uma só recta hiperbólica.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $u \neq v$ pontos de $\mathbb{H}$. Se têm a mesma parte real estão numa única semi-recta vertical. Caso contrário, a mediatriz (euclideana) do segmento euclideano $[uv]$ não é horizontal e tem apenas um ponto de intersecção com o eixo real. Assim, há uma e uma só circunferência (euclideana) de centro real que passa pelos 2 pontos u, v. Note-se que esta é também a única circunferência que passa pelos 4 pontos distintos $u, v, \bar{u}, \bar{v}$. □

Para a seguinte proposição, notamos que podemos "dividir" a esfera de Riemann em 3 pedaços: o "hemisfério direito" $\mathbb{H}$, o "hemisfério esquerdo" $\mathbb{H}^- := -\mathbb{H}$ e a recta real $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

PROPOSIÇÃO 2.69. *As transformações de Möbius da forma*

$$T(w) = \frac{aw+b}{cw+d},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$ preservam $\mathbb{H}$ e são bijectivas.

DEMONSTRAÇÃO. T envia a recta real nela própria: $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Sendo bijectiva, como transformação de $\mathbb{C}_\infty$, envia o complementar de $\mathbb{R}_\infty$, dois semiplanos abertos, neles próprios. Sendo T contínua [Exercício], $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ ou $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^-$. Uma vez que

$$T(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(d-ci)}{c^2+d^2} = \frac{bd+ac+(ad-bc)i}{c^2+d^2},$$

por hipótese, tem parte imaginária positiva, $T(i) \in \mathbb{H}$. Logo $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. □

PROPOSIÇÃO 2.70. *O conjunto das transformações de Möbius reais forma um grupo, $\mathbb{M}(\mathbb{R})$. O subgrupo*

$$\mathbb{M}^+(\mathbb{R}) := \{T(w) = \frac{aw+b}{cw+d} \in Mob(\mathbb{R}) \mid ad - bc > 0\}$$

actua em $\mathbb{H}$ enviando rectas hiperbólicas em rectas hiperbólicas.

DEMONSTRAÇÃO. A propriedade de grupo segue do facto de que $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ contém a transformação identidade e é fechado para a composição. Sendo L uma recta hiperbólica vertical, ela tem limites $x_0 \in \mathbb{R}$ e ∞ em $\mathbb{C}_\infty$. Então $T(L)$ é parte de uma recta L' de $\mathbb{C}_\infty$ (porque é imagem de uma recta de $\mathbb{C}_\infty$ por uma transformação de Möbius) que passa em $T(x_0) = \frac{b}{d}$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$, ambos em $\mathbb{R}_\infty$. Por outro lado, se $T(w) \in L'$, $w \in L$, então $\overline{T(w)} \in L'$ também, porque:

$$T(\bar{w}) = \frac{a\bar{w}+b}{c\bar{w}+d} = \frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}} = \overline{T(w)}.$$

Assim, $T(L)$ é uma recta hiperbólica, pois se não for semi-recta em $\mathbb{H}$, é uma semi-circunferência de centro real. □

EXERCÍCIO 2.71. Mostre que dadas 2 rectas hiperbólicas, existe sempre $T \in \mathbb{M}^+(\mathbb{R})$ que envia uma na outra.

2.6. Isometrias do Plano Hiperbólico

Para falar de isometrias em $\mathbb{H}$ é necessário também introduzir uma noção de distância. Ao contrário da situação no plano e do modelo da esfera, esta noção será introduzida de forma *ad hoc*, tal

como também foram definidas as rectas; veremos, no final desta secção, como estas noções são consistentes e além disso levam, com as devidas diferenças, a geometrias que também têm semelhanças com a plana e a esférica, e que se enquadram no mesmo contexto das transformações de Möbius.

DEFINIÇÃO 2.72. Sejam $u, v \in \mathbb{H}$. A **distância hiperbólica** define-se como:

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(u,v) := \left|\log|[u \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} v]|\right|,$$

onde $a < b$ são os limites reais da única recta hiperbólica que passa u e em v.

Tal como no caso do plano e da esfera, à custa da distância, podemos definir isometrias de $\mathbb{H}$.

DEFINIÇÃO 2.73. Uma **isometria hiperbólica** é uma transformação $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ que preserva a distância hiperbólica entre pontos: $\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(f(u), f(v)) = \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(u,v)$, $\forall u, v \in \mathbb{H}$.

O facto das transformações de Möbius preservarem a razão cruzada implica imediatamente que qualquer transformação de $\mathbb{H}$ obtida por transformação de Möbius será uma isometria hiperbólica.

Como primeiro exemplo temos as transformações de Möbius reais com determinante positivo. Estas preservam $\mathbb{H}$ e vê-se facilmente que são isometrias hiperbólicas. Mas, como no caso da esfera e do plano há também isometrias indirectas de $\mathbb{H}$ que não são desta forma. Assim, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.74. Uma **transformação hiperbólica** é uma transformação de Möbius $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dada por:

$$F(w) = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad \text{se } F \text{ é directa}$$

ou tramsformação anti-Möbius dada por

$$F(w) = \frac{a\bar{w}-b}{c\bar{w}-d}, \quad \text{se } F \text{ é indirecta,}$$

para certos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $ad - bc > 0$. Estas dizem-se normalizadas se $ad - bc = 1$.

OBSERVAÇÃO 2.75. Note-se que as transformações hiperbólicas indirectas são a composição de uma directa $F(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$, com a reflexão na (semi)recta hiperbólica vertical $\mathscr{R}_{\mathbb{H}}(w) := -\bar{w}$ uma vez que

$$F \circ \mathscr{R}_{\mathbb{H}}(w) = \frac{a\mathscr{R}_{\mathbb{H}}(w)+b}{c\mathscr{R}_{\mathbb{H}}(w)+d} = \frac{-a\bar{w}+b}{-c\bar{w}+d} = \frac{a\bar{w}-b}{c\bar{w}-d}.$$

EXERCÍCIO 2.76. Determine a forma geral das transformações hiperbólicas directas que representam, ao mesmo tempo, uma isometria de S^2.

Temos também uma noção de transitividade para pares de pontos distintos em $\mathbb{H}$.

PROPOSIÇÃO 2.77. *[Transitividade] As seguintes afirmações são equivalentes para dois pares de pontos distintos $u \neq v$ e $u' \neq v'$ em $\mathbb{H}$:*
(1) $dist_{\mathbb{H}}(u,v) = dist_{\mathbb{H}}(u',v')$;
(2) Existe uma única *transformação hiperbólica directa T com $T(u) = u'$ e $T(v) = v'$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha-se que os pontos limite da (única) recta hiperbólica que passa em u, v são $a < b \in \mathbb{R}_\infty$ e seja T uma transformação hiperbólica directa. Como T envia rectas hiperbólicas noutras, os pontos limite da única recta hiperbólica que passa em $T(u)$ e em $T(v)$ são precisamente $T(a)$ e $T(b)$ (os pontos de intersecção com $\mathbb{R}_\infty$). Assim temos:

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(u,v) = \left|[u \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} v]\right| = \left|[T(u) \begin{smallmatrix} T(a) \\ T(b) \end{smallmatrix} T(v)]\right| = \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(T(u), T(v)),$$

pelo que estas transformações preservam a distância hiperbólica. Assim, (2) implica (1) (ainda sem a condição de unicidade). Vamos mostrar que existe uma transformação única que envia o par $u \neq v$

no par $u' = i$ e $v' = iy$ com $y > 1$. Não é difícil encontrar uma transformação que envie u em i. De facto, basta resolver a equação

$$\frac{au+b}{cu+d} = i, \quad ad - bc > 0,$$

encontrando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ adequados. Por exemplo, fazendo $c = 0$, $d = 1$, com $u = x + iy$ a solução é $a = \frac{1}{y}$ (note-se que $y > 0$) e $b = -\frac{x}{y}$. Agora determinamos as transformações hiperbólicas directas que fixam o ponto i. Assim, também fixam o ponto $-i$ (como transformações de Möbius em $\mathbb{C}_\infty$), pelo que

$$\begin{cases} ai + b & = i(ci + d) \\ -ai + b & = -i(-ci + d) \end{cases}$$

ou seja $b + c = 0$ e $a = d$. Concluímos que estas transformações estão associadas a matrizes

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

que por sua vez representam rotações de S^2 em torno do eixo x_2. Assim, existe uma e uma só tal transformação que fixa $u = i$ e envia outro ponto v no semi-raio vertical $]i, i\infty[$, pois este é a imagem pela projecção estereográfica de um quarto de círculo máximo na esfera, contido no plano x_2x_3. □

EXERCÍCIO 2.78. Mostre que as transformações hiperbólicas indirectas são também isometrias de $\mathbb{H}$.

A Proposição e o Exercício anteriores são um análogo parcial ao Teorema de Gauss (teorema 2.58) para o plano hiperbólico. Para termos uma analogia completa faltava agora mostrar que, reciprocamente, qualquer isometria de $\mathbb{H}$ é uma transformação hiperbólica. Embora esta afirmação também seja verdadeira, ela poderia tomar-nos muito tempo (o aspecto fundamental é que as isometrias são em particular transformações conformes, que merecem tratamento detalhado), pelo que não avançamos nesse sentido.

Uma outra propriedade interessante da geometria hiperbólica que também não detalhamos, é o facto que os triângulos hiperbólicos (figuras delimitadas por 3 segmentos de recta hiperbólicos) têm ângulos internos cuja soma é inferior a π.

2.7. Comparação entre as geometrias clássicas

Fazemos agora um resumo da comparação das 3 geometrias que estudámos até agora.

Geometria / Modelo	Esférica / S^2, $\mathbb{C}_\infty$	Euclideana / $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$	Hiperbólica / $\mathbb{H}$
intersecção de rectas	2 pontos antípodas	1 ponto	1 ponto ou $\emptyset$
rectas paralelas	não há	1 paralela / ponto	∞ paralelas / ponto
distância entre $\parallel$	zero	finita e constante	variável e ilimitada
soma $\sphericalangle$ internos de $\triangle$	$> \pi$	π	$< \pi$
isometrias directas	rotações	rotações, translações	elipticas, parabólicas, hiperbólicas
isometrias indirectas	conjugação	reflexões simples/deslizantes	reflexão no eixo vertical
Transformações de Möbius / anti-Möbius	$\frac{aw-b}{\bar{b}w+\bar{a}}$, $\frac{a\bar{w}-b}{\bar{b}\bar{w}+\bar{a}}$	$aw+b$, $a\bar{w}+b$, $\lvert a\rvert = 1$	$\frac{aw+b}{cw+d}$, $\frac{a\bar{w}-b}{c\bar{w}-d}$, $ad-bc>0$

Apêndice

Neste apêndice, para completar a demonstração do Teorema de Gauss (Teorema 2.58), mostramos duas fórmulas para a distância esférica.

PROPOSIÇÃO 2.79. *Dados dois pontos $z, w \in \mathbb{C}$ (que podem ser ∞, interpretando adequadamente as fórmulas), temos as seguintes fórmulas*

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(w,z) = ||\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(z)|| = \frac{2|w-z|}{\sqrt{|w|^2+1}\sqrt{|z|^2+1}}, \quad \forall w,z \in \mathbb{C},$$

onde φ é a projecção estereográfica, e também

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(w,z)^2 = 4\left|\begin{bmatrix} w & z \\ w^* & z^* \end{bmatrix}\right|,$$

onde w^* é o número complexo correspondente ao ponto antípoda de $p = \varphi^{-1}(w)$ ou seja, $w^* = -1/\bar{w}$, e o mesmo para z^*.

DEMONSTRAÇÃO. Para a primeira fórmula, sejam $p = (x_1, x_2, x_3)$, e $q = (y_1, y_2, y_3)$ dois pontos distintos e não antípodas em S^2. Temos:

$$||p-q||^2 = ||p||^2 + ||q||^2 - 2p\cdot q = 2 - 2p\cdot q \in]0,4[.$$

Aplicando a fórmula da projecção estereográfica inversa a $\varphi(p) = w = u + iv$,

$$p = (x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|w|^2+1}(2u,\, 2v,\, |w|^2 - 1),$$

e a fórmula análoga para $\varphi(q) = z = s + it$ obtemos:

$$\begin{aligned} 1 - p\cdot q &= 1 - x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \\ &= 1 - \frac{4us + 4vt + (|w|^2-1)(|z|^2-1)}{(|w|^2+1)(|z|^2+1)} = \\ &= \frac{(|w|^2+1)(|z|^2+1) - 4\Re(w\bar{z}) - (|w|^2-1)(|z|^2-1)}{(|w|^2+1)(|z|^2+1)} = \\ &= 2\frac{|w|^2 + |z|^2 - 2\Re(w\bar{z})}{(|w|^2+1)(|z|^2+1)} = 2\frac{|w-z|^2}{(|w|^2+1)(|z|^2+1)}. \end{aligned}$$

De onde se conclui, finalmente:

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(w,z)^2 = ||p-q||^2 = 2(1-p\cdot q) = \frac{4|w-z|^2}{(|w|^2+1)(|z|^2+1)},$$

como pretendido.

Para a segunda fórmula, desenvolvemos a razão cruzada:

$$\left|\begin{bmatrix} w & z \\ w^* & z^* \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{w-z}{w-w^*}\,\frac{w^*-z^*}{z-z^*}\right| = \left|\frac{w-z}{w+\frac{1}{\bar{w}}}\,\frac{\frac{1}{\bar{w}}-\frac{1}{\bar{z}}}{z+\frac{1}{\bar{z}}}\right| \frac{|\bar{z}\bar{w}|}{|\bar{z}\bar{w}|} = \frac{|w-z|\,|\bar{z}-\bar{w}|}{(|w|^2+1)(|z|^2+1)},$$

que iguala $\frac{1}{4}d_{\mathbb{C}_\infty}(w,z)^2$, por aplicação da primeira fórmula. □

2.8. Problemas

Nestes exercícios $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{D} = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{H} = \{\Im z > 0\} \subset \mathbb{C}$.

2.1 Seja R uma rotação de S^2, diferente da identidade. Mostre que R tem exactamente dois pontos fixos que são antípodas.

2.2 Mostre que pontos antípodas são enviados em pontos antípodas por uma qualquer isometria de S^2.

2.3 A aplicação antipodal $a : S^2 \to S^2$ é a aplicação que leva cada ponto no seu antípoda: $a(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Escreva a como a composição de 3 reflexões.

2.4 Suponha que a aplicação estereográfica envia $p \in S^2$ no número complexo w. Mostre que $-p$, o antípoda de p, é enviado no número $-1/\bar{w} \in \mathbb{C}$.

2.5 Seja T uma transformação de Möbius dada pela matriz $T_M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mostre que T^{-1} é dada pela matriz

$$\tilde{T}_M = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

2.6 Considere o conjunto de matrizes

$$SU = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Mostre que o produto de matrizes em SU está ainda em SU. Como se interpreta este facto em termos de rotações em S^2?

2.7 Seja $T(w) = \frac{aw+b}{cd+d}$ uma transformação de Möbius escrita na forma normalizada. Supondo que $T \circ T(w) = w$, para todo o w no domínio (e com $T(w)$ também no domínio), verifique que $a + d = 0$.

2.8 Determine uma transformação de Möbius T que fixa os pontos -1 e 1, e envia i na origem, isto é: $T(1) = 1$, $T(-1) = -1$ e $T(i) = 0$. Esta transformação é única?

2.9 Usando o teorema de Gauss, verifique que qualquer rotação em torno do eixo dos x, se pode escrever, no plano complexo, na forma:

$$f(w) = \frac{aw + bi}{biw + a},$$

onde a e b são números reais que verificam $a^2 + b^2 = 1$.

2.10 Determine uma transformação de Möbius $T(w)$ que envia a circunferência unitária C para o eixo imaginário L, e a origem para $-1 \in \mathbb{C}$. Se T_1 e T_2 são duas transformações com as mesmas propriedades, $T_1 \circ T_2^{-1}$ é necessariamente a identidade? Justifique.

2.11 Determine explicitamente uma isometria de $\mathbb{D}$ que envia $\frac{i}{2}$ em $\frac{1}{2}$.

2.12 Seja l uma recta em $\mathbb{D}$ e $p \in \mathbb{D}$. Prove que existe uma única recta em $\mathbb{D}$ perpendicular a l que passa em p. [Sugestão: usando isometria apropriada, verifique que pode assumir $p = 0$]

2.13 Considere a recta $l_0 := \{x = 0\}$ em $\mathbb{H}$. Mostre que o conjunto de pontos, em $\mathbb{H}$, a uma distância fixa $c > 0$ de l_0 é uma semirecta em $\mathbb{C}$, que passa na origem.

2.14 Mostre que a soma dos ângulos de um triângulo hiperbólico é sempre menor que π. [Sugestão: usando isometria apropriada, pode assumir que um dos vértices é a origem].

2.15 Mostre que qualquer circunferência hiperbólica (o conjunto de pontos com distância hiperbólica fixa relativa a um dado ponto) é também uma circunferência em $\mathbb{C}$.

2.16 Seja $T(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$ uma isometria distinta da identidade. Sendo tr$A$ o traço da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mostre que:

(a) $|\text{tr}A| > 2$ se e só se T é uma translacção hiperbólica,

(b) $|\text{tr}A| < 2$ se e só se T é uma rotação hiperbólica.

CAPíTULO 3

Geometria Projectiva

A geometria projectiva é a geometria que está envolvida num desenho de um dado sólido em perspectiva, de modo a ser desenhado num papel, visionado numa televisão, ou projectado numa tela. É a geometria das representações bidimensionais da realidade tridimensional envolvente, e mais geralmente, é a geometria associada a projecções em subespaços lineares de qualquer dimensão em $\mathbb{R}^n$ a partir de um ponto, usualmente designado por *foco*.

Uma observação importante é que, como as projecções distorcem as distâncias, em geometria projectiva a noção de distância deixa de ser relevante, mantendo-se como fundamentais as noções de rectas, paralelismo, intersecção etc.

Nestas notas, concentramo-nos em espaços projectivos reais e complexos em dimensão um e dois fazendo referências ocasionais a espaços projectivos de dimensão superior.

3.1. O plano projectivo real

Começamos com a definição do plano projectivo real, relacionando-o com a esfera.

DEFINIÇÃO 3.1. O **plano projectivo** $\mathbb{R}P^2$ é o conjunto de todos os pares de pontos antípodas da esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Assim, um elemento do conjunto $\mathbb{R}P^2$ identifica-se com um par $\{p, -p\}$, $p \in S^2$; em alternativa, $\mathbb{R}P^2$ é o conjunto das classes de equivalência de pontos em S^2, onde dois pontos são considerados equivalentes se são antípodas.

Desta forma, definimos uma aplicação natural entre a esfera e o plano projectivo dada por:

$$\begin{aligned} \breve{\pi} : S^2 &\to \mathbb{R}P^2 \\ p &\mapsto [p], \end{aligned}$$

onde $[p]$ denota a classe de equivalência de p (que é a mesma de $-p$). Qualquer ponto $x = [p] \in \mathbb{R}P^2$ tem duas pré-imagens $\breve{\pi}^{-1}(x) = \{p, -p\} \subset S^2$. Em particular, $\breve{\pi}$ é uma aplicação sobrejectiva.

3.1.1. Rectas e planos em $\mathbb{R}P^2$. Usando a geometria de S^2 e a projecção $\breve{\pi}$, podemos definir rectas e planos em $\mathbb{R}P^2$.

DEFINIÇÃO 3.2. Uma **recta em** $\mathbb{R}P^2$ (também chamada **recta projectiva**) é a imagem, por $\breve{\pi}$, de uma recta em S^2.

Sendo construído a partir da esfera, o plano projectivo tem propriedades mais simples que S^2, e que $\mathbb{R}^2$, no que toca a intersecções de rectas e incidências. Isto é consequência natural de uma outra interpretação do plano projectivo, que pode ser facilmente generalizada a dimensão superior.

LEMA 3.3. *O plano projectivo $\mathbb{R}P^2$ é o conjunto de todas as rectas homogéneas em $\mathbb{R}^3$. Desta forma, uma recta projectiva (de $\mathbb{R}P^2$) corresponde a um plano homogéneo em $\mathbb{R}^3$.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma vez que 2 pontos antípodas de S^2 definem uma e uma única recta homogénea em $\mathbb{R}^3$, isto define uma bijecção natural entre $\mathbb{R}P^2$ e este conjunto de rectas. A segunda afirmação é análoga e deixa-se ao leitor. □

PROPOSIÇÃO 3.4. *Dados dois pontos distintos de $\mathbb{R}P^2$ existe* uma única *recta de $\mathbb{R}P^2$ que os contém. Duas rectas distintas de $\mathbb{R}P^2$ têm exactamente* um *ponto de intersecção.*

DEMONSTRAÇÃO. Duas rectas projectivas distintas correspondem a dois planos distintos no espaço $\mathbb{R}^3$, de acordo com o Lema anterior. Estes 2 planos intersectam-se numa única recta homogénea em $\mathbb{R}^3$ que, portanto, define um único ponto em $\mathbb{R}P^2$. A primeira afirmação prova-se de forma semelhante (ou usando o Exercício 2.17). □

Desta forma, *não há rectas paralelas* no plano projectivo, tal como no caso da esfera S^2. Por outro lado, enquanto que em S^2 há sempre 2 pontos de intersecção antípodas, temos agora a unicidade da intersecção de duas rectas distintas em $\mathbb{R}P^2$.

OBSERVAÇÃO 3.5. A Proposição acima tem ainda outra consequência interessante, que pode ser pensada como uma espécie de dualidade: dois pontos distintos definem uma única recta (aquela que passa pelos dois); duas rectas distintas definem um único ponto (o ponto de intersecção das duas).

3.1.2. Coordenadas homogéneas. Há uma definição alternativa de $\mathbb{R}P^2$ que é muito útil, pois permite facilmente usar várias ferramentas de Álgebra Linear.

LEMA 3.6. *O plano projectivo $\mathbb{R}P^2$ é o conjunto das classes de equivalência de vectores não nulos em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, onde dois vectores são considerados equivalentes se são múltiplos um do outro (por um escalar não nulo).*

DEMONSTRAÇÃO. O conjunto dos vectores múltiplos de um vector não nulo, define precisamente uma e uma só recta homogénea; esta correspondência fornece a bijecção pretendida. □

Assim, temos também uma aplicação natural:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}P^2 \\ \mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}], \end{aligned} \tag{4}$$

onde $[\mathbf{v}]$ designa agora a classe de equivalência de $\mathbf{v}$ de acordo com o Lema anterior.

Esta aplicação é sobrejectiva, mas claramente não injectiva: quaisquer dois vectores não nulos múltiplos um do outro têm a mesma imagem. Esta aplicação permite-nos definir coordenadas homogéneas:

DEFINIÇÃO 3.7. Um ponto $x \in \mathbb{R}P^2$ diz-se que tem **coordenadas homogéneas** $[x_1, x_2, x_3]$ se

$$\pi((x_1, x_2, x_3)) = x.$$

OBSERVAÇÃO 3.8. Note-se que, se $[x_1, x_2, x_3]$ são as coordenadas homogéneas de $x \in \mathbb{R}P^2$, então:

- x_1, x_2 e x_3 são números reais, *não todos nulos* simultaneamente;
- $[\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$ são coordenadas homogéneas do mesmo ponto x, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Se escrevemos $[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3]$, esta igualdade não significa que $y_i = x_i$ (ao contrário do que sucede com coordenadas de vectores), mas que existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $y_i = \alpha x_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Terminologia Nas condições da Definição 3.7, usamos a notação:

$$x = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}P^2,$$

e dizemos que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é um **vector representativo** para x.

TEOREMA 3.9. *Sejam $p = [p_1, p_2, p_3]$ e $q = [q_1, q_2, q_3]$ pontos distintos de $\mathbb{R}P^2$. Então, a recta projectiva que eles definem é dada por*

$$\{[tp + sq] \,|\, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

onde escrevemos $[tp+sq] = [tp_1+sq_1, \cdots, tp_3+sq_3]$. Esta recta consiste nos pontos $p = [x, y, z] \in \mathbb{R}P^2$ cujas coordenadas homogéneas verificam:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja L a única recta projectiva que contém p e q. Sendo $\mathbf{v} = (p_1, p_2, p_3)$ e $\mathbf{w} = (q_1, q_2, q_3)$ vectores representativos de p e q, em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, a recta L corresponde ao plano homogéneo $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (estes vectores são linearmente independentes, pois $q \neq p$ em $\mathbb{R}P^2$). Assim, basta provar que ambas as representações definem o plano $\mathscr{P}$.

Claramente, um vector pertence a $\mathscr{P}$ se e só se é da forma $t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Assim, L consiste nos pontos de coordenadas homogéneas da forma $[sp + tq]$, como pretendido (como $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes $t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ nunca se anula, excepto quando $(t,s) = (0,0)$).

Supomos agora que (x,y,z) está em $\mathscr{P} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (ou seja, $[x,y,z] \in L$). Então $(x,y,z) = t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ para certos $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Portanto, (x,y,z) é linearmente dependente das duas últimas linhas da matriz acima, que por sua vez equivale ao anulamento do determinante indicado (pois as duas últimas linhas são linearmente independentes). Assim $(x,y,z) \in \mathscr{P} \setminus \{\mathbf{0}\}$ se e só se verifica a equação dada. □

Léxico Por simplicidade, chamamos parametrização de L à primeira representação acima e equação Cartesiana de L à segunda.

EXEMPLO 3.10. A recta de $\mathbb{R}P^2$ que passa por $[1,2,0]$ e por $[0,-1,3]$ é dada, em coordenadas homogéneas, por

$$[t,\ 2t - s,\ 3s], \quad s,t \in \mathbb{R},$$

ou seja, é a recta projectiva de equação $2x - \frac{z}{3} = y$ (corresponde ao plano homogéneo de $\mathbb{R}^3$ dado pela mesma equação). Para determinar uma equação Cartesiana da recta que passa por $[2,1,2]$ e por $[1,-5,0]$ usamos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

e obtemos a recta de $\mathbb{R}P^2$ dada por $10x + 2y - 11z = 0$.

Da mesma forma, a intersecção de duas rectas projectivas distintas, cada uma correspondendo a um plano homogéneo em $\mathbb{R}^3$, obtém-se determinando $p \in \mathbb{R}P^2$ que corresponde à intersecção desses dois planos (que é um recta homogénea).

EXERCÍCIO 3.11. Determine a intersecção do par de rectas em $\mathbb{R}P^2$: $x - y - z = 0$ e $x + 5y + 2z = 0$.

3.2. Espaços projectivos em geral

A projecção π da Equação (4) relaciona objectos de dimensão um (respectivamente, dois) em $\mathbb{R}^3$ com pontos (dimensão zero) ou com rectas (respectivamente, dimensão um) em $\mathbb{R}P^2$. De facto, para $x \in \mathbb{R}P^2$ e L uma recta projectiva $\pi^{-1}(x)$ é uma recta (sem origem), e $\pi^{-1}(L)$ é um plano (sem a origem). Este diccionário revela-se de grande importância, e é válido em qualquer dimensão, e até sobre qualquer corpo.

DEFINIÇÃO 3.12. Seja V um espaço vectorial real de dimensão finita. Dois vectores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dizem-se equivalentes e escrevemos $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ ou $[\mathbf{v}] = [\mathbf{w}]$ se existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$. O espaço projectivo de V designado por $P(V) := V/\sim$ é o **espaço das classes de equivalência** desta relação, pelo que temos uma projecção natural

$$\begin{aligned} \pi : V \setminus \{\mathbf{0}\} &\to P(V) \\ \mathbf{v} &\mapsto [\mathbf{v}]. \end{aligned}$$

Uma **recta** de $P(V)$ é a imagem, por π, de um plano (subespaço de V de dimensão 2); um **plano** de $P(V)$ é a imagem, por π, de um subespaço de V de dimensão 3, etc.

OBSERVAÇÃO 3.13. (1) Da mesma forma, podemos generalizar a definição de rectas e planos homogéneos dada no capítulo 2: uma **recta homogénea** (resp. **plano homogéneo**) em V, é um subespaço linear de dimensão 1 (resp. 2) de V, ou seja uma recta (resp. plano) que passa na origem de V. Assim, $P(V)$ é o **espaço das rectas homogéneas em** V.

(2) No caso em que $V = \mathbb{R}^{n+1}$ escrevemos $P(V) = \mathbb{R}P^n$, para $n \geq 0$, e podemos definir coordenadas homogéneas, da mesma forma que antes. Temos, então:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} &\to \mathbb{R}P^n \\ (x_0, x_1, \cdots, x_n) &\mapsto [x_0, x_1, \cdots, x_n], \end{aligned}$$

e dizemos, de igual forma que antes, que $(x_0, \cdots, x_{n+1})$ é um **vector representativo** do ponto $[x_0, x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{R}P^n$.

(3) Da mesma forma se podem definir espaços projectivos sobre qualquer corpo. Em particular, para o corpo dos números complexos podemos definir **espaço projectivo complexo** como o conjunto:

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim,$$

sendo $\sim$ a relação que torna equivalentes quaisquer vectores múltiplos por um escalar complexo.

EXEMPLO 3.14. O exemplo mais simples é o espaço projectivo de dimensão 1. Chamamos-lhe a **recta projectiva real** $\mathbb{R}P^1$, quando o corpo base é $\mathbb{R}$ e a **recta projectiva complexa** quando o corpo é $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}P^1$ (resp. $\mathbb{C}P^1$) é o conjunto das rectas que passam na origem em $\mathbb{R}^2$ (resp. o conjunto dos $\mathbb{C}$-subespaços lineares de $\mathbb{C}^2$ de dimensão 1) .

EXERCÍCIO 3.15. Encontre uma bijecção natural entre $\mathbb{R}P^1$ e a circunferência $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

3.2.1. Projecções centrais e coordenadas afins. Há ainda outros modelos para os espaços projectivos que reflectem melhor a ideia de projecção. Para o explicar, voltamos a considerar o plano projectivo (dimensão 2), e vamos obter $\mathbb{R}P^2$ através de uma projecção central a partir do hemisfério superior (aberto):

$$S^2_+ := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\},$$

tendo como contradomínio um plano horizontal com $z = 1$.

DEFINIÇÃO 3.16. Seja $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^3$ o plano definido por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 1\}$. A **projecção central** de S^2_+ é definida por:

$$\begin{aligned} \psi : S^2_+ &\to \mathscr{P} \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{1}{z}(x, y) \end{aligned}$$

É fácil verificar que ψ é bijectiva. Note-se a diferença entre esta projecção, sobre o plano $z = 1$, e a projecção estereográfica, sobre o plano $z = 0$, em $\mathbb{R}^3$.

PROPOSIÇÃO 3.17. *ψ envia (segmentos de) rectas em S^2_+ em rectas de $\mathbb{R}^2$.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é análoga à da mesma propriedade para a projecção estereográfica. □

EXERCÍCIO 3.18. Indique como definir uma projecção central entre a semi-circunferência $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ e a uma recta horizontal $y = 1$ em $\mathbb{R}^2$ e conclua que a recta projectiva real pode ser interpretada como união de $\mathbb{R}$ com um ponto no infinito.

A projecção central não está definida para $z = 0$. Podemos pensar que estes são pontos no infinito. Mais precisamente, os pontos no infinito são classes de equivalência de pontos antípodas na circunferência equatorial de S^2, dada por $z = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$. Em alternativa, os pontos no infinito são as rectas homogéneas no plano $z = 0$. Assim temos a seguinte decomposição de $\mathbb{R}P^2$.

PROPOSIÇÃO 3.19. *O plano projectivo pode decompor-se como a seguinte união disjunta:*

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}P^1.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos explicitar uma inclusão:

$$\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2, \quad \eta(x, y) = [x, y, 1].$$

Os pontos que não estão na imagem são aqueles que têm coordenadas homogéneas $[x,y,0]$ com $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Estes pontos estão em bijecção com $\mathbb{R}P^1=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}/\sim$ uma vez que aqui, a equivalência é a mesma do costume (multiplicação por escalar não nulo). □

Léxico Do ponto de vista desta decomposição, as coordenadas $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ que correspondem ao ponto $[x,y,1]\in\mathbb{R}P^1$ são chamadas **coordenadas afins** desse ponto. O subconjunto $\mathbb{R}P^1\subset\mathbb{R}P^2$ é a chamado a **recta projectiva no infinito** e corresponde ao plano $z=0$, em $\mathbb{R}^3$.

Da mesma forma se prova a seguinte generalização.

PROPOSIÇÃO 3.20. *Um espaço projectivo de dimensão n pode decompor-se da seguinte forma:*

$$\mathbb{R}P^n=\mathbb{R}^n\sqcup\mathbb{R}P^{n-1},$$

e o mesmo é válido para o corpo dos complexos: $\mathbb{C}P^n=\mathbb{C}^n\sqcup\mathbb{C}P^{n-1}$.

3.2.2. A recta projectiva complexa. A Proposição 3.20 mostra, em particular, que $\mathbb{C}P^1=\mathbb{C}\sqcup\{\infty\}$, o que significa que $\mathbb{C}P^1$ pode ser identificado com a esfera de Riemann, o que vamos agora aprofundar.

Recordemos que a recta projectiva complexa $\mathbb{C}P^1$ é o espaço dos subespaços lineares em $\mathbb{C}^2$ de dimensão 1 (ou seja, das rectas complexas homogéneas em $\mathbb{C}^2$). Tal como vimos anteriormente, um ponto $p\in\mathbb{C}P^1$ pode ser definido pelas suas coordenadas homogéneas $[z_1,z_2]$ e temos a projecção canónica:

$$\pi:\mathbb{C}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{C}P^1,$$

que associa a um vector representativo complexo $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ o correspondente ponto na recta projectiva complexa, de coordenadas homogéneas $[z_1,z_2]$.

LEMA 3.21. *Em* $\mathbb{C}P^1$ *há apenas um ponto no infinito:* $\mathbb{C}P^1=\mathbb{C}\sqcup\{\infty\}$. *De facto, temos um isomorfismo:*

$$S^2\to\mathbb{C}P^1,$$

dado por $(x_1,x_2,x_3)\mapsto[x_1+ix_2,1-x_3]$.

DEMONSTRAÇÃO. Nota-se simplesmente que esta fórmula é a mesma que a da projecção estereográfica, quando interpretada em $\mathbb{C}P^1$. □

Concluímos então que o ponto $[0,1]$ corresponde a $0\in\mathbb{C}$ e o ponto $[1,0]$ corresponde a ∞ ou PN. A coordenada $w\in\mathbb{C}\sqcup\{\infty\}$ que corresponde a $[w,1]$ (ou $[1,0]$ caso $w=\infty$) é chamada a **coordenada afim** de $\mathbb{C}P^1$. Por outras palavras, temos a seguinte observação.

OBSERVAÇÃO 3.22. As coordenadas homogéneas de um ponto $w\in\mathbb{C}_\infty$ na esfera de Riemann são $[w,1]$, se $w\neq\infty$ e são $[1,0]$ quando $w=\infty$. A coordenada afim do ponto $[w,z]$ são w/z se este é complexo e ∞ se $z=0$.

3.3. Projectividades

Qualquer transformação linear invertível $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ envia rectas homogéneas em rectas homogéneas; e envia qualquer subespaço de dimensão $k\leq n$ num outro subespaço com a mesma dimensão. Isto motiva a teoria dos espaços projectivos em dimensão arbitrária.

3.3.1. Colineações e Projectividades. Transformações que enviam rectas em rectas, nesta geometria ou noutras, são chamadas, em geral, colineações. Como estamos particularmente interessados no caso do plano projectivo, fazemos apenas a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 3.23. Uma **Colineação** é uma transformação bijectiva de $\mathbb{R}P^2$ em si mesmo, que preserva rectas de $\mathbb{R}P^2$.

Seja $\tilde{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear invertível, e portanto bijectiva. Como $\tilde{T}$ envia rectas homogéneas e planos homogéneos noutros espaços do mesmo tipo, isto significa que a imagem de um ponto de $\mathbb{R}P^2$ é um ponto, e a imagem de uma recta em $\mathbb{R}P^2$ é outra recta. De facto, como $\tilde{T}$ é bijectiva, a inversa também realiza o mesmo tipo de correspondências, pelo que $\tilde{T}$ induz uma aplicação bijectiva $T : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$, preservando rectas.

OBSERVAÇÃO 3.24. Sendo $\tilde{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear invertível, é fácil ver que $T : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ é dada explicitamente por:

$$T(\pi(\mathbf{v})) = \pi(\tilde{T}(\mathbf{v})),$$

onde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

DEFINIÇÃO 3.25. Uma **projectividade** (de $\mathbb{R}P^2$) é uma transformação bijectiva $T : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ tal que existe $\tilde{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear invertível que verifica $T(\pi(\mathbf{v})) = \pi(\tilde{T}(\mathbf{v}))$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Por outras palavras, mostrámos o seguinte.

LEMA 3.26. *Todas as projectividades são colineações.*

O recíproco deste resultado é também verdade: todas as colineações são projectividades, resultado que é consequência do que se chama o Teorema Fundamental da Geometria Projectiva.

3.3.2. O teorema fundamental da geometria projectiva. Vamos expor este teorema, porque não apreseta maior dificuldade, no contexto de espaços projectivos de dimensão arbitrária, e começamos pela noção de posição geral.

DEFINIÇÃO 3.27. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Dizemos que $n+2$ pontos $x_0, \cdots, x_{n+1}$ em $\mathbb{R}P^n$ estão em **posição geral** se qualquer subconjunto de $n+1$ pontos têm vectores representativos linearmente independentes em $\mathbb{R}^{n+1}$ (equivalentemente, que formem base de $\mathbb{R}^{n+1}$).

EXEMPLO 3.28. (1) Para $n = 1$, vemos que 3 pontos de $\mathbb{R}P^1$ estão em posição geral se são todos distintos.

(2) Sendo $n = 2$, os pontos $p_1 = [1,0,0]$, $p_2 = [0,1,0]$, $p_3 = [0,0,1]$ e $p_4 = [5,-3,0]$ não estão em posição geral, pois não há vectores representativos de p_1, p_2 e p_4 que formem base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Os pontos

$$p_1 = [1,0,0], \quad p_2 = [0,1,0], \quad , p_3 = [0,0,1], \quad \text{e } p_4 = [1,1,1],$$

estão em posição geral em $\mathbb{R}P^2$ (qualquer triplo tem uma base de vectores representativos) e chamam-se o **quádruplo canónico**.

EXERCÍCIO 3.29. Mostre: (a) quatro pontos estão em posição geral em $\mathbb{R}P^2$ se e só se nenhum triplo está numa só recta; ou seja *não há triplos colineares* (b) cinco pontos estão em posição geral em $\mathbb{R}P^3$ se e só se nenhum quádruplo está num plano de $\mathbb{R}P^3$ (a imagem por π de um subespaço de dimensão 3 de $\mathbb{R}^4$).

Estamos agora em condições de enunciar o Teorema fundamental da geometria projectiva que se pode interpretar no contexto dos vários resultados sobre transitividade que temos considerado.

TEOREMA 3.30. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Dados dois conjuntos $\{x_1, \cdots, x_{n+2}\}$ e $\{y_1, \cdots, y_{n+2}\}$ de $n+2$ pontos de $\mathbb{R}P^n$, com cada conjunto em posição geral, existe uma e uma única projectividade que envia o primeiro conjunto no segundo.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar o resultado para $n = 2$, sendo o caso geral inteiramente análogo. Existência: escolhendo $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_4$ representativos de x_1, x_2, x_3, x_4 temos:

$$\mathbf{v}_4 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3,$$

porque $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_3$ é base. Todos os α's são $\neq 0$ porque caso contrário a relação acima contraria posição geral. Assim, podemos substituir v_i por $\alpha_i v_i$ e escrever

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Agora fazemos o mesmo com os pontos y's e vectores representativos $\mathbf{w}_i$, obtendo:

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3.$$

Definimos então $T(\mathbf{v}_i) := \mathbf{w}_i$ para $i = 1,2,3$ e obtemos

$$T(\mathbf{v}_4) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) + T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_4,$$

como queriamos provar. A unicidade deixa-se como exercício. □

EXERCÍCIO 3.31. Encontre uma projectividade que envia o quádruplo canónico no quádruplo $(q_1, \cdots, q_4)$ com $q_1 = [2,-1,1]$, $q_2 = [0,1,1]$, $q_3 = [1,0,2]$, $q_4 = [0,0,1]$.

O teorema fundamental da geometria projectiva permite abordar muitos (de facto todos, se interpretados adequadamente) dos teoremas clássicos de geometria projectiva, usando esta "variante projectiva" da álgebra linear.

Para ilustrar o método, vamos agora demonstrar o teorema de Desargues, considerado geralmente como o resultado fundador da geometria projectiva. Para isso, o seguinte Lema é muito útil sendo usado repetidamente tanto neste como noutros teoremas clássicos. Vamos usar letras a negrito para os vectores representativos de cada ponto, por exemplo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ denota um vector representativo de $a \in \mathbb{R}P^2$.

LEMA 3.32. *Três pontos $p,q,r \in \mathbb{R}P^2$ são colineares se e só se há 3 vectores representativos que satisfazem a relação*

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

DEMONSTRAÇÃO. Se 3 vectores não nulos satisfazem a relação, os 3 pertecem ao mesmo plano homogéneo, o que significa que pertecem os 3 à mesma recta projectiva. O recíproco é análogo. □

TEOREMA 3.33. *(Desargues) Sejam abc e $a'b'c'$ triângulos (a,b,c distintos e a',b',c' também) em $\mathbb{R}P^2$. Se as três rectas aa', bb' e cc' são concorrentes (e distintas) e se intersectam num único ponto p, então as três intersecções $ab \cap a'b'$, $bc \cap b'c'$ e $ac \cap a'c'$ são colineares.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $p \in \mathbb{R}P^2$ o ponto de intersecção das 3 rectas. Usando letras a negrito para os respectivos vectores representativos, temos:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{c} + \mathbf{c}'.$$

Sejam $\mathbf{d} := \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{b}' - \mathbf{a}'$, $\mathbf{e} := \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{c}' - \mathbf{b}'$ e $\mathbf{f} := \mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{a}' - \mathbf{c}'$. Então $d := \pi(\mathbf{d}) \in \mathbb{R}P^2$ está na intersecção das rectas ab e $a'b'$, porque as suas coordenadas homogéneas são combinação linear das de a e b, e das de a' e b'. Da mesma forma $e = \pi(\mathbf{e}) = bc \cap b'c'$ e $f = \pi(\mathbf{f}) = ac \cap a'c'$. Finalmente, temos:

$$\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{0},$$

o que mostra que e,d,f são colineares. □

3.4. Projectividades e transformações de Möbius

DEFINIÇÃO 3.34. Uma projectividade de $\mathbb{C}P^1$ é uma transformação $T : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ tal que existe $\hat{T} \in GL(2,\mathbb{C})$ com $\pi(\hat{T}(v)) = T(\pi(v))$, para todo $v \in \mathbb{C}^2$, sendo $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^1$ a aplicação quociente. Define-se o mesmo para $\mathbb{R}P^1$.

LEMA 3.35. *Uma projectividade de $\mathbb{C}P^1$, quando escrita em coordenadas afins, é dada por uma transformação de Möbius. O mesmo ocorre para $\mathbb{R}P^1$.*

DEMONSTRAÇÃO. A projectividade mais geral é dada por $T[x_1, x_2] = [ax_1 + bx_2,\, cx_1 + dx_2]$, com $ad - bc \neq 0$. Sendo $w = x_1/x_2$ a coordenada afim de $[x_1, x_2] \in \mathbb{C}P^1$, temos:

$$T[\frac{x_1}{x_2}, 1] = T[x_1, x_2] = [ax_1 + bx_2,\, cx_1 + dx_2] = [\frac{ax_1 + bx_2}{cx_1 + dx_2},\, 1],$$

ou seja

$$T(w) = \frac{ax_1 + bx_2}{cx_1 + dx_2} = \frac{aw + b}{cw + d},$$

como queriamos provar. □

EXEMPLO 3.36. Determine a expressão, em coordenadas afins, da projectividade que envia o triplo $[3,1]$, $[1,0]$ e $[0,1]$ no triplo canónico. (Observação: o resultado é válido tanto para $\mathbb{C}P^1$ como para $\mathbb{R}P^1$).

COROLÁRIO 3.37. *Existe uma e uma única projectividade $T : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ que envia 3 pontos em posição geral em 3 pontos em posição geral. O mesmo é válido para $\mathbb{R}P^1$.*

3.4.1. A razão cruzada revisitada. Recorde-se que, dados quatro pontos distintos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ temos:

$$[c \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} d] := \frac{c-a}{c-b}\frac{b-d}{a-d}.$$

PROPOSIÇÃO 3.38. *Sendo $a, b, c, d \in \mathbb{C}P^1$ dados em coordenadas homogéneas, temos:*

$$[c \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} d] := \frac{\begin{vmatrix} c \\ a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c \\ b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ d \end{vmatrix}}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Deixa-se como exercício. □

PROPOSIÇÃO 3.39. *A projectividade dada por $T(w) = [w_1 \begin{smallmatrix} w_\infty \\ w_0 \end{smallmatrix} w]$ é a única que envia w_1 em $[1,1]$, w_0 em $[0,1]$ e w_∞ em $[1,0]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos $T(w_1) = [w_1 \begin{smallmatrix} w_\infty \\ w_0 \end{smallmatrix} w_1] = \frac{w_1 - w_\infty}{w_\infty - w_1}\frac{w_0 - w_1}{w_1 - w_0} = 1$, etc. □

3.5. Problemas

Nestes exercícios $\mathbb{R}P^2$ designa o plano projectivo real e $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^2$ a projecção canónica. $\mathbb{R}P^1$ denota (resp. $\mathbb{C}P^1$) a recta projectiva real (resp. complexa).

3.1 Em $\mathbb{R}P^2$, determine uma equação da recta projectiva que passa por $[1,1,0]$ e por $[2,0,7]$

3.2 Em $\mathbb{R}P^2$, determine a equação geral das rectas projectivas que passam pelo ponto $[0,1,2]$.

3.3 Determine, em $\mathbb{R}P^2$, o ponto de intersecção entre a recta que passa por $[8,-1,2]$ e por $[1,-2,-1]$ e a recta que passa por $[0,1,-1]$ e $[2,3,1]$.

3.4 Determine, em $\mathbb{R}P^2$, o ponto de intersecção das rectas de equações: $x+6y-5z=0$ e $x-2y+z=0$.

3.5 Sejam $p=\pi(a_1,a_2,a_3)$, $q=\pi(b_1,b_2,b_3)$ e $r=\pi(c_1,c_2,c_3)$ três pontos em $\mathbb{R}P^2$. Mostre que p,q e r são colineares se e só se:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3.6 Considere o referencial projectivo canónico: $p_0=[1,0,0]$, $p_1=[0,1,0]$ e $p_2=[0,0,1]$ e $p_3=[1,1,1]$ em $\mathbb{R}P^2$, e os quatro pontos: $q_0=p_0$, $q_1=p_1$, $q_2=[1,0,1]$ e $q_3=[3,-1,2]$. Determine uma projectividade $T:\mathbb{R}P^2\to\mathbb{R}P^2$ com $T(q_i)=p_i$, para $i=1,2,3,4$.

3.7 Seja l a recta homogénea de $\mathbb{R}P^2$ definida por $x_2=0$ e seja $p=[1,0,0]$. Determine, em coordenadas homogéneas, a expressão da projecção $\pi_l : \mathbb{R}P^2\setminus\{p\}\to l$ sobre l, a partir do foco em p.

3.8 [Teorema de Ceva] Sejam $p=\pi(\mathbf{p})$, $q=\pi(\mathbf{q})$ e $r=\pi(\mathbf{r})$ três pontos não colineares em $\mathbb{R}P^2$, com vectores representativos $\mathbf{p},\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$. Sendo $a,b,c\in\mathbb{R}$, defina $\mathbf{p}' := \mathbf{q}+a\mathbf{r}$, $\mathbf{q}' := \mathbf{r}+b\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}' := \mathbf{p}+c\mathbf{q}$ (e os pontos $p',q',r'\in\mathbb{R}P^2$ correspondentes). Prove que as rectas definidas por pp', qq' e rr' são concorrentes se e só se $abc=1$.

3.9 Considere o referencial projectivo canónico: $p_0=[1,0]$, $p_1=[0,1]$ e $p_2=[1,1]$ em $\mathbb{C}P^1$. Determine uma projectividade $F:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^1$ tal que $F(p_0)=p_2$, $F(p_1)=p_0$ e $F(p_2)=p_1$. Quantas projectividades existem nestas condições?

3.10 Considere a projectividade $T:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^1$ definida por $T[x,y]=[x+y,2x-y]$. Indique uma matriz que define T, e determine a imagem, por T, dos pontos do referencial canónico.

3.11 Determine uma projectividade $M:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^1$ com as seguintes características: M fixa o ponto $[1,1]$ e $M[0,1]=[2,1]$, $M[-1,1]=[5,3]$.

3.12 Mostre as seguintes propriedades da razão cruzada para números complexos $a,b,c,d\in\mathbb{C}$:

(a) $[c\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\ d]=[a\ \begin{smallmatrix}c\\d\end{smallmatrix}\ b]=[d\ \begin{smallmatrix}b\\a\end{smallmatrix}\ c]$

(b) $[c\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\ d]=1/[c\ \begin{smallmatrix}b\\a\end{smallmatrix}\ d]$

(c) $[c\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\ d]=-1$ se e só se $[c\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\ d]=[d\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\ c]$.

3.13 Considere a razão cruzada $[c\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\ d]$ entre 4 pontos no plano complexo: $a,b,c,d\in\mathbb{C}$. Mostre que $[c\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\ d]$ é um número real se e só se a,b,c,d estão todos na mesma circunferência de $\mathbb{C}P^1$, vista como a esfera de Riemann S^2.

3.14 Mostre que as transformações de Möbius que preservam o semiplano superior $\mathbb{H}$ são transformações da forma $T(w)=\frac{aw+b}{cw+d}$ com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ e $ad-bc>0$.

Parte 2

Introdução à Geometria Diferencial

Nesta segunda parte, passamos a um tratamento mais analítico da geometria, fazendo uso das ferramentas do cálculo diferencial e integral a várias variáveis. Veremos que estas ferramentas nos permitem abordar conceitos métricos relativos à geometria de curvas e superfícies quando estas estão "mergulhadas" num espaço "ambiente" dotado de referenciais cartesianos.

Devido ao foco nas propriedades geométricas usaremos funções com tantas derivadas quantas sejam necessárias para o problema em causa. Dessa forma, usaremos a palavra *diferenciável* para caracterizar as funções que admitem infinitas derivadas contínuas, ou seja, as que são também designadas por *funções de classe* C^∞.

CAPíTULO 4

Curvas no plano e no espaço

Neste capítulo, estudamos a geometria das curvas em $\mathbb{R}^n$. Este estudo será aprofundado nos casos em que n é 2 ou 3, ou seja, para as *curvas no plano* e para as *curvas no espaço*, respectivamente.

Para um tratamento adequado, surje a necessidade de distinguir entre os conceitos intimamente ligados de caminhos e curvas.

Um caminho é um *percurso* no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, imaginado como um conjunto de pontos que estão a ser percorridos à medida que o tempo passa. Desta forma, um *caminho* é descrito por uma função γ de uma variável real, $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ que, a cada instante t, faz corresponder um ponto $\gamma(t)$ em $\mathbb{R}^n$.

Por sua vez, a *curva* associada ao caminho γ será toda a sua *trajectória*: o conjunto de todos os pontos $\gamma(t)$, com $t \in [a,b]$, ou por outras palavras, o conjunto *imagem* $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$.

4.1. Caminhos em $\mathbb{R}^n$

Aqui, e adiante, $[a,b]$ denota um intervalo, que não se reduz a um ponto, na recta real ($a < b \in \mathbb{R}$), e n um número natural $n \geq 2$.

DEFINIÇÃO 4.1. Um **caminho (em $\mathbb{R}^n$)** é uma aplicação

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

que é seccionalmente de classe C^1, isto é, $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ *existe e a função* $t \mapsto \gamma'(t)$ *é contínua* excepto para um conjunto finito de valores de $t \in [a,b]$.[1]

Léxico Diz-se que o caminho γ *começa em* $\gamma(a)$ e termina em $\gamma(b)$. Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados os extremos de γ, sendo $\gamma(a)$ o ponto inicial, e $\gamma(b)$ o ponto final de γ. Um valor $t \in [a,b]$ chama-se instante, e quando existe, o vector $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ designa-se **vector derivada** ou **vector velocidade** de γ no instante t.

OBSERVAÇÃO 4.2. Por vezes, convém considerar intervalos ilimitados ou abertos (ou semi-abertos). Assim, chamamos ainda caminhos às funções $\gamma(t)$ em que $t \in \mathbb{R}$, ou t pertence a um intervalo do tipo $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$, com $a,b \in \mathbb{R}$.

Vejamos como calcular, na prática, o vector derivada. Se escrevermos a função $\gamma(t)$ em coordenadas:

$$\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [a,b],$$

cada componente $x_i(t)$ representa uma função real de variável $t \in [a,b]$ e o vector derivada escreve-se naturalmente como:

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), \cdots, x_n'(t)) = (\frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [a,b].$$

A sua *norma* é a norma euclideana:

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2} \geq 0.$$

Veremos adiante que $\gamma'(t)$ é, de facto, um *vector tangente* à curva traçada pela função $\gamma(t)$.

EXEMPLO 4.3. Seja $\gamma(t) = (2\cos(3t),\ 1-t^2,\ \frac{e^t}{t})$ para $t \in [1,3]$. Então

$$\gamma'(t) = (-6\sin(3t),\ -2t,\ e^t\frac{t-1}{t^2}).$$

[1] Dizemos que $\gamma'(a)$ existe, se existe no sentido de derivada lateral, e analogamente para $\gamma'(b)$.

4.1.1. Caminhos regulares; exemplos. Para a maioria das aplicações geométricas, podemos reduzir o estudo aos designados *caminhos regulares*: aqueles cujo vector derivada *nunca se anula*. Além disso, vamos simplificar a nossa abordagem considerando caminhos infinitamente diferenciáveis. Assim, excepto quando explicitamente indicado, a expressão "função diferenciável" será equivalente a "função de classe C^∞".

DEFINIÇÃO 4.4. Um **caminho regular (em $\mathbb{R}^n$)** é uma aplicação diferenciável $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$$

para todo o $t \in [a,b]$ (sendo $\gamma'(a)$ e $\gamma'(b)$ definidos como limites laterais).

Vejamos alguns exemplos no plano. Estes estão associados a objectos geométricos naturais, que constituem a imagem

$$\gamma([a,b]) := \{\gamma(t) \,|\, t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Note-se também que o domínio de definição, o intervalo $[a,b]$, desempenha um papel fundamental.

EXEMPLO 4.5. (1) O caminho $\gamma(t) = tq + (1-t)p$, com $t \in [0,1]$, é regular, como se verifica de imediato. A imagem é $\gamma([0,1]) = [p,q]$, ou seja, o *segmento de recta entre* $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.
(2) Sendo $\gamma(t) = (x_0 + a\cos t,\, y_0 + b\sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$, vemos que $\gamma([0,2\pi])$ é uma *elipse de centro* (x_0, y_0) *e semi-eixos* $a, b > 0$. Note-se que o ponto inicial e final coincidem: $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, pelo que γ se designa *caminho fechado*.
(3) O caminho $\gamma(t) = (r\cos t,\, r\sin t,\, ct)$, com $r, c > 0$ constantes, define uma *hélice finita* se $t \in [a,b]$, e uma *hélice infinita*, se $t \in \mathbb{R}$.
(4) Sendo $p \in \mathbb{R}^n$ fixo, o caminho dado por $\gamma(t) := p$, $t \in [0,1]$ não é regular, pois $\gamma'(t) = 0$. Caminhos deste tipo são chamados *caminhos constantes*.
(5) Considere-se $\gamma(t) = (t^3,\, t^2)$ e $\tilde{\gamma}(t) = (t^3 - 2t,\, t^2)$, $t \in [a,b]$. Então $\tilde{\gamma}$ é regular, mas γ não é, se $0 \in [a,b]$. A curva $\gamma([a,b])$ chama-se *ciclóide*.
(6) A imagem do caminho $\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \log(\tan(t/2))$, $t \in]0,\pi[$ está representada na figura e chama-se *tractrix*. Note-se que aqui usámos um intervalo aberto devido ao domínio de definição do logaritmo.

EXERCÍCIO 4.6. Calcule $\gamma'(t)$ para todos os exemplos acima, verificando as afirmações acerca da regularidade de $\gamma(t)$.

Com grande frequência precisamos de considerar caminhos que não são regulares de forma natural, mas que são seccionalmente regulares. Vamos chamá-los *concatenações* de caminhos regulares.

EXEMPLO 4.7. Este exemplo constrói um *caminho poligonal*. Consideremos $m+1$ pontos em $\mathbb{R}^n$: $p_0, \cdots, p_m$. O caminho dado por:

$$\gamma(t) := (t-k)p_{k+1} + (k+1-t)p_k, \qquad t \in [k, k+1]$$

para $k = 0, \cdots, m-1$, e $t \in [0,m]$, é um caminho que representa a junção de m segmentos de recta passando pelos pontos dados. Note-se que a velocidade $\gamma'(t)$ apenas não está definida nos instantes $\{1, 2, \cdots, m-1\} \subset [0,m]$, e que este caminho poligonal é a *concatenação*, no sentido da definição seguinte, de caminhos da forma dada no exemplo 4.1.5(1) (que representam segmentos de recta).

Podemos generalizar a construção anterior com a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4.8. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho, de forma a que $\gamma'(t)$ apenas não existe para $t \in \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}$, com $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m+1} = b$. Assim, definindo os caminhos $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$, com $i = 0, \cdots, m$, pela fórmula $\gamma_i(t) := \gamma(t)$ dizemos que γ é a **concatenação** de $\gamma_0, \cdots, \gamma_m$ (nesta ordem) e escrevemos

$$\gamma = \gamma_0 * \cdots * \gamma_m.$$

4.1.2. Caminhos mensuráveis e Comprimento. Um dos conceitos fundamentais no estudo de caminhos e de curvas é o de *comprimento*. Para defini-lo, vamos restringir-nos aos *caminhos mensuráveis*.

DEFINIÇÃO 4.9. Um caminho γ diz-se **mensurável** (ou **rectificável**) se satisfaz

$$\int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt < +\infty.$$

Nem todos os caminhos são mensuráveis, como se mostra de seguida.

EXERCÍCIO 4.10. Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido por $\gamma(t) = (t,\, t\sin\left(\frac{1}{t}\right))$, $\gamma(0) = (0,0)$. Mostre que γ é seccionalmente C^1 (γ é contínua em $[0,1]$ e tem derivada em $]0,1]$) mas que não é mensurável. Note que, neste caso, $\gamma'(0)$ não existe (nem como limite lateral) e por isso γ não é regular.

OBSERVAÇÃO 4.11. Veremos que um caminho regular (definido num intervalo compacto) é mensurável (Proposição 4.14) embora existam caminhos mensuráveis não regulares. São exemplos disto os caminhos constantes, ou as concatenações de caminhos regulares (Definição 4.8).

DEFINIÇÃO 4.12. O **comprimento** de um caminho mensurável $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é o número real (não negativo)

$$C(\gamma) := \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt.$$

EXEMPLO 4.13. (1) Um caminho que percorre a semi-circunferência unitária no plano $\Gamma := \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$, é, por exemplo $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ com $t \in [0,\pi]$. Uma vez que $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, com norma constante igual a 1 o seu comprimento é

$$C(\gamma) = C(\Gamma) = \int_0^\pi ||\gamma'(t)||\, dt = \int_0^\pi 1\, dt = \pi,$$

como esperado.

(2) O segmento de recta entre p e q, definido pelo caminho

$$\gamma(t) := tq + (1-t)p,$$

para $t \in [0,1]$, tem comprimento $C([p,q]) = ||q-p||$.

(3) Um caminho constante tem comprimento zero.

PROPOSIÇÃO 4.14. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho regular. Então γ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Se a derivada $\gamma'(t)$ existe e $t \mapsto \gamma'(t)$ é contínua para todo o $t \in [a,b]$ (sendo $\gamma'(a)$ e $\gamma'(b)$ definidos por limites laterais) então a função $||\gamma'(t)||$ é também contínua. Além disso, é limitada, pois está definida num conjunto *compacto* ($[a,b]$ é intervalo fechado e limitado: $a, b \in \mathbb{R}$). Assim, pelo teorema de integração de Riemann, $\int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt$ existe e é finito. □

OBSERVAÇÃO 4.15. Nesta proposição é essencial o facto de $[a,b]$ ser compacto. Por outro lado, a demonstração segue válida se admitirmos que γ é apenas seccionalmente C^1, desde que existam os limites laterais $\lim_{t\to t_0^\pm} \gamma'(t)$ para todo o ponto t_0 em que não existe $\gamma'(t_0)$.

EXERCÍCIO 4.16. Mostre que a concatenação de caminhos mensuráveis é mensurável, e que o comprimento do caminho $\gamma := \gamma_1 * \cdots * \gamma_n$ é precisamente a soma dos comprimentos: $C(\gamma) = \sum_{i=1}^n C(\gamma_i)$.

O integral de uma função com valores em $\mathbb{R}^n$ é fácil de definir. Em particular, sendo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ com $\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ o integral de γ é definido como:

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = \left(\int_a^b x_1(t)\, dt, \cdots, \int_a^b x_n(t)\, dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

O seguinte exercício mostra que o Teorema Fundamental do Cálculo tem uma simples generalização para caminhos.

EXERCÍCIO 4.17. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que:

$$\int_a^b \gamma'(t)\, dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Sumário 4.1 *Conceitos base*: caminho (regular), velocidade, comprimento, concatenação. *Resultado fundamental*: mensurabilidade dos caminhos regulares em compactos.

4.2. Curvas e parametrizações

Consideremos um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ arbitrário. Frequentemente, estamos mais interessados no *conjunto imagem*, isto é no conjunto

$$\Gamma := \{\gamma(t) : \ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$$

do que na função particular $t \mapsto \gamma(t)$. Os conjuntos obtidos desta forma chamam-se *curvas*.

4.2.1. Curvas regulares.

DEFINIÇÃO 4.18. Sejam $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n$. Uma **curva (orientada) de p_0 a p_1** é a imagem $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ de um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que começa em $\gamma(a) = p_0$ e termina em $\gamma(b) = p_1$. Uma curva diz-se **regular** se for a imagem de um caminho regular.

Léxico Diz-se que que Γ é parametrizada pelo caminho γ, e que γ parametriza (ou é uma parametrização de) Γ, e usamos a notação:

$$\Gamma = (\gamma).$$

Tal como para os caminhos, p_0 e p_1 são os extremos de Γ, sendo p_0 o ponto inicial de Γ, e p_1 o ponto final.

Um exemplo natural de curvas são os gráficos de funções.

EXERCÍCIO 4.19. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que o seu gráfico $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva regular.

Desta forma, a um caminho associamos uma única curva: a sua imagem. Naturalmente, para cada curva Γ em $\mathbb{R}^n$, existem inúmeras (em geral, infinitas) parametrizações de Γ.

OBSERVAÇÃO 4.20. Dado um caminho $\gamma(t)$ definido em $[a,b]$, o caminho $\gamma(bt + (1-t)a)$ definido em $[0,1]$ parametriza a mesma curva. Assim, poderíamos, em teoria, definir todos os caminhos no *intervalo padrão* [0,1]. No entanto, para muitas aplicações geométricas convém manter a flexibilidade de usar intervalos adequados a cada problema concreto, por exemplo nos casos em que interpretamos o parâmetro t como o tempo decorrido. Em particular, as parametrizações por *comprimento de arco*, que estudaremos adiante, estão definidas em intervalos cujo tamanho é igual ao comprimento da curva.

EXEMPLO 4.21. Os três caminhos $\sigma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in [0,1]$, $\eta(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e $\nu(t) = (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))$, $t \in [0,1]$ parametrizam a mesma circunferência, mas apenas o último caminho é percorrido no sentido horário. Note-se também que η têm pontos inicial e final diferentes dos extremos dos caminhos σ e ν.

EXERCÍCIO 4.22. Seja $\psi : [a,b] \to [c,d]$ uma função diferenciável e bijectiva, com $\psi'(t) > 0$ para todo o $t \in [a,b]$, e seja $\gamma : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ um caminho regular. Mostre que $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \psi$, uma função $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é também um caminho regular que parametriza a mesma curva.

EXEMPLO 4.23. O caminho poligonal que passa pelos pontos $p_0, \cdots, p_m \in \mathbb{R}^n$ (ver exemplo 4.7) define uma curva poligonal que se denota por $[p_0,p_1] * [p_1,p_2] * \cdots * [p_{m-1},p_m]$ (por consistência com a notação na Definição 4.8) ou simplesmente por $[p_0,p_1,\cdots,p_m]$.

EXERCÍCIO 4.24. Considere a curva Γ parametrizada por um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Mostre que Γ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. O mesmo resultado é válido se γ estiver definido num intervalo aberto $]a,b[$?

A proposição seguinte justifica que o vector derivada $\gamma'(t)$ é *tangente* à curva Γ no ponto $\gamma(t)$.

PROPOSIÇÃO 4.25. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho e $p = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$ tal que $\mathbf{v} := \gamma'(t_0)$ está definido e não é nulo. Então a recta*

$$L := \{p + t\mathbf{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

é a que melhor aproxima a curva $\Gamma = (\gamma)$, no ponto p. Em particular, $\gamma'(t_0)$ é um vector tangente *a Γ, no ponto p.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela fórmula de Taylor, temos

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + O(|t - t_0|^2),$$

num intervalo perto de t_0. Assim, a recta que melhor aproxima $\gamma(t)$ em $\gamma(t_0)$ é a recta parametrizada por $\gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) = p + (t - t_0)\mathbf{v}$, ou seja, a recta L. Portanto $\gamma'(t_0)$ é um vector tangente a esta recta. □

OBSERVAÇÃO 4.26. Note-se que o sentido do vector $\gamma'(t)$ coincide com o sentido em que se percorre o conjunto $\Gamma = \{\gamma(t) : \ t \in [a, b]\}$, ou seja, com t a variar desde a até $b > a$. Além disso, se $\gamma'(t) \neq 0$, qualquer seu múltiplo é também vector tangente a Γ no ponto $\gamma(t)$.

Tal como seria de esperar, o comprimento de um caminho depende **apenas** da curva correspondente.

PROPOSIÇÃO 4.27. *Se γ e $\tilde{\gamma}$ são caminhos mensuráveis que parametrizam a mesma curva Γ, então $C(\gamma) = C(\tilde{\gamma})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usa-se o facto de que $||(\gamma \circ \varphi)'(t)|| = ||\gamma'(\varphi(t))||\,|\varphi'(t)|$, que segue da regra da cadeia, e a fórmula de mudança de variável para integrais em $\mathbb{R}$. □

Podemos então definir o comprimento de uma curva Γ como o comprimento de qualquer caminho que a parametrize. Mais precisamente:

DEFINIÇÃO 4.28. Seja Γ a curva parametrizada pelo caminho mensurável γ. O **comprimento de** Γ é dado pelo integral $\int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt$, e denota-se por $C(\Gamma) = C(\gamma)$.

A teoria geométrica das curvas consiste no estudo das suas propriedades geométricas: propriedades *independentes* das parametrizações. Em particular, o comprimento de uma curva é uma tal propriedade geométrica.

4.2.2. Caminhos métricos e parametrizações por comprimento de arco. Vamos usar a terminologia *caminho métrico* para caminhos cujo vector velocidade tem comprimento constante e igual a 1.

DEFINIÇÃO 4.29. Um caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ diz-se **métrico** se $||\gamma'(t)|| = 1$ para todo o $t \in I$. Se $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva regular, uma **parametrização métrica** (ou **parametrização por comprimento de arco**) de Γ é um caminho métrico que parametriza Γ.

Sendo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho, a curva $\gamma([a, s])$ é um subconjunto de $\Gamma = (\gamma)$, para todo $s \in]a, b]$. De facto, $\gamma([a, s])$, que designamos simplesmente por $\gamma[a, s]$ é parametrizada pelo mesmo caminho γ, onde apenas muda o intervalo, que passa a ser $[a, s] \subset [a, b]$.

LEMA 4.30. *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho métrico e $s \in [a, b]$. Temos as seguintes propriedades fundamentais:*

(i) $s - a = C(\gamma[a, s])$; em particular $C(\gamma) = b - a$.
(ii) $\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) = 0$; em particular, se $\gamma''(t) \neq 0$, o ângulo orientado de $\gamma'(t)$ a $\gamma''(t)$ é sempre recto.

DEMONSTRAÇÃO. (i) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), obtemos:

$$C(\gamma[a, s]) = \int_a^s ||\gamma'(t)||\,dt = \int_a^s 1\,dt = s - a.$$

(ii) Como $||\gamma'(s)||^2 = \gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = 1$ é constante, temos $(\gamma' \cdot \gamma')' = 2\gamma' \cdot \gamma'' = 0$. □

OBSERVAÇÃO 4.31. Podemos *sempre* normalizar o domínio dos caminhos métricos, de forma a ser $[0, L]$, onde $L = C(\gamma)$ é o comprimento de γ. De facto, se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é métrico, e definirmos $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t + a)$, então $\tilde{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ também parametriza a mesma curva.

Embora pareça uma forte restrição, resulta que, sempre que um caminho é regular, ele equivale a um caminho métrico, no sentido em que ambos parametrizam a mesma curva. Este teorema mostra que qualquer curva regular admite uma parametrização canónica, de forma essencialmente única.

TEOREMA 4.32. *Seja* Γ *uma curva regular. Então, existe uma parametrização métrica de* Γ.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de Γ. Por definição $\gamma'(t) \neq 0$ para todo o $t \in [a,b]$. Defina-se:

$$\psi(t) := \int_a^t ||\gamma'(\tau)|| d\tau, \quad t \in [a,b].$$

Então ψ é um difeomorfismo entre $[a,b]$ e $[0,L]$, onde $L = C(\Gamma)$, uma vez que $\psi'(t) = ||\gamma'(t)|| > 0$. Sendo $\varphi := \psi^{-1}$ defina-se $\tilde{\gamma}(s) := \gamma \circ \varphi(s)$. Então a regra da cadeia implica:

$$\tilde{\gamma}' = (\gamma \circ \varphi)' = \gamma' \varphi' = \frac{\gamma'}{\psi'} = \frac{\gamma'}{||\gamma'||},$$

o que significa que $\tilde{\gamma} : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ é uma parametrização métrica de Γ. □

Nas expressões acima, deixamos para o leitor a tarefa de incluir os pontos onde se calculam as derivadas (Exemplo: $(\gamma \circ \varphi)'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)$ e $\varphi'(\psi(t)) = 1/\psi'(t)$ para todo $s \in [0,L]$ e $t \in [a,b]$), completanto a demonstração da sua validade. Faremos o mesmo sempre que se justificar, de modo a simplificar a exposição.

De acordo com o Teorema, qualquer curva regular Γ pode ser parametrizada por um caminho métrico da forma $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ em que $L = C(\Gamma)$. Uma vez que o parâmtro deste caminho é o número real $s \in [0,L]$ que representa, precisamente de acordo com o Lema 4.30, o comprimento da curva $\gamma([0,s])$, fica justificada a terminologia em que dizemos que γ é uma parametrização por "comprimento de arco".

4.2.3. Curvas fechadas, curvas simples, e período. Vamos agora definir curvas fechadas e curvas simples, que têm propriedades que podemos chamar "globais", por não dependerem de pequenas perturbações da curva dada.

DEFINIÇÃO 4.33. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho. Este diz-se **fechado** se os seus extremos coincidem: $\gamma(a) = \gamma(b)$; diz-se **regular fechado** se (além de γ ser regular e de $\gamma(a) = \gamma(b)$) também temos $\gamma'(a) = \gamma'(b)$. O caminho γ diz-se **simples** se $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ para quaisquer $a \leq t < t' < b$ (com $\{t,t'\} \neq \{a,b\}$). As noções para curvas são análogas.

OBSERVAÇÃO 4.34. Há um ponto subtil nesta terminologia. Uma curva pode ser regular e fechada, mas não ser *fechada regular* (no sentido da definição) como mostra o próximo exercício.

EXERCÍCIO 4.35. (1) Para $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ a curva parametrizada por $\gamma(t) = \cos(2t)(\cos t, \sin t)$ é simples e fechada. É também regular, mas não é fechada regular!
(2) Determine quais das seguintes curvas são simples, fechadas, regulares e fechadas regulares.

DEFINIÇÃO 4.36. Seja $T > 0$ um número real positivo fixo. Uma função C^∞ $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que verifique $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$, diz-se que é periódica de período T.

TEOREMA 4.37. *Seja* Γ *uma curva regular fechada. Então* Γ *admite uma parametrização periódica métrica cujo período é igual ao seu comprimento total.*

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização métrica de Γ com $\gamma(0) = \gamma(L)$ e $\gamma'(0) = \gamma'(L)$ (é um exercício simples modificar a demonstração do Teorema 4.32 para verificar que tal caminho γ existe, com Γ regular fechada). Então γ pode ser estendida a uma função com domínio $\mathbb{R}$. De facto, caso um número real fixo t não seja múltiplo inteiro de L ($\frac{t}{L} \notin \mathbb{Z}$), definimos:

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t - nL),$$

onde n é o único inteiro de tal forma que $t - nL \in]0,L[$. Caso $\frac{t}{L} = n \in \mathbb{Z}$, define-se $\tilde{\gamma}(nL) = \gamma(0) = \gamma(L)$. É imediato que $\tilde{\gamma}$ é periódica de período L. □

4.2.4. Aproximação por curvas poligonais. Nem sempre é fácil determinar explicitamente uma fórmula para o comprimento de uma curva (depende de podermos primitivar uma dada função que envolve uma raiz quadrada). Uma forma de estimar o comprimento de uma curva consiste em aproximar a curva por polígonos.

DEFINIÇÃO 4.38. Seja Γ uma curva parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, e $\mathscr{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$. Chamamos à curva poligonal formada pelos segmentos de recta que unem $\gamma(a), \gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_{N-1}), \gamma(b)$ (nesta ordem) a **curva poligonal inscrita em** γ **associada à partição** $\mathscr{P}$ e denotamos esta curva por:

$$\Gamma_{\mathscr{P}} := [\gamma(a), \gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_{N-1}), \gamma(b)] = [\gamma(a), \gamma(t_1)] * \cdots * [\gamma(t_{N-1}), \gamma(b)].$$

TEOREMA 4.39. *Seja Γ uma curva parametrizada por um caminho mensurável $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Então o supremo $\sup_{\mathscr{P}}\{C(\Gamma_{\mathscr{P}})\}$ existe, e coincide com o comprimento de Γ:*

$$C(\Gamma) = \sup_{\mathscr{P}}\{C(\Gamma_{\mathscr{P}})\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. (1) Em primeiro lugar, podemos ver que o comprimento de qualquer curva é minorado pela distância entre os seus dois extremos (ver o Exercício ??):

$$C(\Gamma) \geq ||\gamma(b) - \gamma(a)|| = C([\gamma(a), \gamma(b)]).$$

Desta forma, para qualquer partição $\mathscr{P}$, $C(\Gamma_{\mathscr{P}}) \leq C(\Gamma)$ o que mostra que o supremo existe.
(2) Se $\mathscr{P}'$ é uma partição mais fina que $\mathscr{P}$, vemos também que

$$C(\Gamma_{\mathscr{P}'}) \geq C(\Gamma_{\mathscr{P}}).$$

Além disso, a desigualdade é estrita se, para algum instante $t_i \in \mathscr{P}' \setminus \mathscr{P}$, $\gamma(t_i)$ não pertence ao segmento de recta $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+1})]$, devido à desigualdade triangular. Assim, assumindo que Γ não contém nenhum segmento de recta (a demonstração geral facilmente se reduz a este caso), vemos que o supremo é precisamente $C(\Gamma)$. □

Sumário 4.2 *Conceitos base*: curva (regular), parametrização, equivalência de caminhos; caminho métrico, comprimento de arco; curva fechada, curva simples; aproximação poligonal. *Resultados fundamentais*: existência e propriedades de parametrizações métricas de curvas regulares; relação entre período e comprimento; o comprimento como supremo.

4.3. Curvas no Plano

Nesta secção consideramos curvas no plano: estudamos os caminhos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, com $n = 2$, e as suas imagens $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Um dos conceitos mais importantes é o de curvatura, que é uma propriedade local de um dado caminho ou curva; intuitivamente, esta mede, para cada ponto $p \in \Gamma$, o maior ou menor afastamento de Γ relativamente à recta tangente de Γ em p.

Para definir curvatura no plano, precisamos da noção de vector normal: um vector cuja direcção é perpendicular à direcção tangente.

DEFINIÇÃO 4.40. Seja Γ curva no plano parametrizada por γ e $p = \gamma(t) \in \Gamma$. O **vector normal** (orientado) de Γ no ponto p é $N(t) := (-y', x')$, onde $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e o **vector normal unitário** (em $\gamma(t)$) é:

$$n(t) := \frac{N(t)}{||N(t)||} = \frac{(-y', x')}{((x')^2 + (y')^2)^{1/2}}.$$

OBSERVAÇÃO 4.41. Verifica-se $N \cdot \gamma' = 0$ para todo o t. Em particular, para um caminho métrico, $N = n$ (pois $||N|| = ||\gamma'|| = 1$) e o par de vectores $(\gamma'(t), n(t))$ formam uma base *ortonormada* (e orientada) de $\mathbb{R}^2$, em qualquer instante $t \in [a,b]$ (mesmo quando $\gamma''(t)$ se anula).

4.3.1. Curvatura orientada (no plano). Vamos definir curvatura inicialmente para caminhos métricos. Vimos que, para estes tipos de caminho γ temos $\gamma'' \perp \gamma'$ (Lema 4.30), mas também $n \perp \gamma'$, por definição. Assim, existe uma função diferenciável $t \mapsto \kappa(t) \in \mathbb{R}$, que verifica

$$\gamma''(t) = \kappa(t)\, n(t).$$

Esta função é a *função curvatura* que, como veremos, é maior (em módulo) quanto menor for o raio da circunferência que melhor aproxima a nossa curva, em cada ponto.

DEFINIÇÃO 4.42. Seja Γ uma curva regular no plano, com parametrização métrica $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$. A **curvatura (orientada) de** Γ **no ponto** $p = \gamma(t) \in \Gamma$, denotada por κ_p ou $\kappa(t)$ é definida pela equação:

$$\kappa(t) = \gamma''(t) \cdot n(t),$$

sendo $n(t)$ o vector normal de Γ em $p = \gamma(t)$.

OBSERVAÇÃO 4.43. Em particular, a curvatura verifica, para γ métrico,

$$|\kappa(t)| = ||\gamma''(t)||, \qquad \forall t \in [a, b]$$

e o sinal de κ é positivo quando γ'' e n têm a mesma direcção (caso em que (γ', γ'') é base orientada positivamente) e negativo caso contrário. Assim, $\gamma'' = \kappa n$, como foi antecipado.

PROPOSIÇÃO 4.44. *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ um caminho regular, mas não necessariamente métrico. Então*

$$\kappa = \frac{\gamma'' \cdot n}{||\gamma'||^2},$$

como funções de $t \in [a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO. Se γ é métrico, $||\gamma'(t)|| = 1$ e γ'' tem a mesma direcção que n pelo que $\kappa = \gamma'' \cdot n$, e a fórmula é válida. No caso geral, seja $t = \psi(s)$, $s \in [0, L]$ uma reparametrização por comprimento de arco, de modo a que, para o caminho $\sigma := \gamma \circ \psi$, temos $\sigma(s) = \gamma(\psi(s))$, e pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \sigma'(s) &= \gamma'(\psi(s))\,\psi'(s), \\ \sigma''(s) &= \gamma''(\psi(s))\,(\psi'(s))^2 + \gamma'(\psi(s))\,\psi''(s). \end{aligned}$$

Estando subentendidos o ponto s ou $\psi(s)$ onde se calcula, temos

$$\kappa = \frac{\sigma'' \cdot n}{||\sigma'||^2} = \frac{[(\psi')^2\gamma'' + \psi''\gamma'] \cdot n}{||\gamma'||^2(\psi')^2} = \frac{(\psi')^2\gamma'' \cdot n}{(\psi')^2||\gamma'||^2}, \tag{5}$$

como queriamos demonstrar, onde usámos o facto que $\gamma' \cdot n = 0$ □

A Proposição anterior mostra que a curvatura é uma outra propriedade geométrica: a Equação (5) mostra que uma mudança de parametrização introduz o mesmo multiplicador (o factor $(\psi')^2$) em $\gamma'' \cdot n$ e em $||\gamma'||^2$, pelo que o quociente se mantém invariante.

EXERCÍCIO 4.45. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ um caminho regular, não necessariamente métrico. Mostre a seguinte fórmula:

$$\kappa(t) = \frac{1}{||\gamma'||^3} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Da mesma forma que o comprimento é o integral de $||\gamma'||$, a curvatura total é o integral de κ ao longo do tempo.

DEFINIÇÃO 4.46. Seja Γ uma curva regular no plano, com parametrização $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Então o número real

$$K(\Gamma) := \int_0^L \kappa(t)\,dt$$

chama-se a **curvatura total** de Γ.

EXERCÍCIO 4.47. Mostre que a curvatura total é invariante por mudança de parametrização. Mais precisamente, dada uma curva regular Γ com $\Gamma = (\gamma) = (\tilde{\gamma})$ para dois caminhos regulares $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^2$ (não necesariamente métricos) com funções curvatura κ e $\tilde{\kappa}$, então

$$\int_a^b \kappa(t)\,dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \tilde{\kappa}(t)\,dt.$$

EXEMPLO 4.48. A circunferência $C_R = \{x^2+y^2 = r^2\}$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (r\cos(\frac{t}{r}), r\sin(\frac{t}{t}))$, $t \in [0, 2\pi r]$. Esta é uma parametrização métrica, pois $\gamma'(t) = (-\sin(\frac{t}{r}), \cos(\frac{t}{r}))$ tem norma 1, e temos:

$$\gamma''(t) = (-\frac{1}{r}\cos(\frac{t}{r}), -\frac{1}{r}\sin(\frac{t}{r})),$$

pelo que a curvatura é positiva e de valor constante $\kappa(t) = \frac{1}{r}$. A curvatura total é, então $K = 2\pi$. (independente de r!!!).

EXERCÍCIO 4.49. Sejam Γ e Γ' duas curvas iguais que diferem apenas no sentido do percurso: o ponto final de Γ é o ponto inicial de Γ' e vice-versa. Mostre que o vector velocidade, a normal unitária, a função curvatura e a curvatura total de Γ e de Γ' são simétricos.

4.3.2. Função argumento e o número de rotação de uma curva fechada. O mais importante *invariante global* de uma curva no plano é o chamado *número de rotação* ou *índice* da curva. Para defini-lo, vamos fazer a identificação do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}^2$, e escrever:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}.$$

Identificamos, da mesma forma, as derivadas de γ com números complexos e podemos escrever $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ tanto na forma cartesiana como na polar. Assim, temos

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t),$$

e $|\gamma'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$, sempre que $\gamma'(t)$ está definido. Note-se que podemos também escrever: $|\gamma'|^2 = \gamma'\bar{\gamma}$, e temos a seguinte relação entre produto e produto interno dos vectores $z = x + iy$ e $w = u + iv$:

$$z \cdot w = xu + yv = \Re(\bar{z}w).$$

Aplicando estas fórmulas a um caminho métrico, obtemos uma nova fórmula para a curvatura:

LEMA 4.50. *A curvatura de um caminho métrico γ verifica:*

$$\kappa = \Im(\bar{\gamma'}\gamma'') = \frac{1}{i}\bar{\gamma'}\gamma'' = \frac{\gamma''}{i\gamma'}$$

Em particular, $\frac{1}{i}\bar{\gamma'}\gamma''$ é um número real.

DEMONSTRAÇÃO. Como γ é métrico, $\Re(\bar{\gamma'}\gamma'') = \gamma'' \cdot \gamma' = 0$, pela fórmula acima. Assim $w = \bar{\gamma'}\gamma'' = iy$ é um número imaginário puro. Por outro lado, é fácil de ver que, em termos de números complexos o vector normal é

$$n = -y' + ix' = i(x' + iy') = i\gamma'.$$

Assim, com $w = \bar{\gamma'}\gamma'' = iy$,

$$\kappa = \gamma'' \cdot n = \Re(\overline{i\gamma'}\gamma'') = \Re(-iw) = y = \frac{1}{i}\bar{\gamma'}\gamma'',$$

como pretendido. Para a última expressão usa-se $1 = |\gamma'|^2 = \bar{\gamma'}\gamma'$. □

Para um caminho métrico podemos escrever $\gamma'(t)$ na forma polar $\gamma'(t) = e^{i\theta(t)} \in S^1$, para cada $t \in [a, b]$ e para certo $\theta(t) \in \mathbb{R}$. O mais interessante é que podemos escolher cada ângulo $\theta(t)$ *de forma que a função $t \mapsto \theta(t)$ seja diferenciável.*

PROPOSIÇÃO 4.51. *Seja $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ um caminho métrico. Então existe uma função diferenciável (chamada* função argumento*) $\theta : [0, L] \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma'(t) = e^{i\theta(t)}$. A função θ não é única, mas quaisquer duas escolhas diferentes desta função diferem por uma parcela constante, um múltiplo inteiro de 2π.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja θ_0 é um possível argumento de $\gamma'(0)$ e definimos:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \kappa(\tau)d\tau.$$

[2]Que corresponde a usar o isomorfismo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dado por $(x, y) \mapsto z = x + iy$.

Temos então que $\theta(t)$ é diferenciável e $\theta' = \kappa = \frac{1}{i}\bar{\gamma'}\gamma''$, pelo Lema anterior. Vamos agora mostrar que $\gamma' e^{-i\theta}$ é, de facto, uma constante. Derivando obtemos:

$$(\gamma' e^{-i\theta})' = \gamma'' e^{-i\theta} - i\gamma'\theta' e^{-i\theta} = e^{-i\theta}(\gamma'' - i\gamma'\theta') = e^{-i\theta}(\gamma'' - i\gamma'\frac{\bar{\gamma'}\gamma''}{i}) = 0,$$

onde usámos novamente que $|\gamma'|^2 = \bar{\gamma'}\gamma' = 1$. Finalmente, como $\gamma'(0)e^{-i\theta_0} = 1$, concluímos que

$$\gamma'(t) = e^{i\theta(t)},$$

para todo o instante $t \in [0, L]$. Deixamos a última frase (as escolhas apenas dependem de θ_0), para o leitor. □

COROLÁRIO 4.52. *Se Γ é uma curva regular fechada, então o número*

$$n_\Gamma := \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$$

é um número inteiro. Além disso, este número não depende da escolha da função argumento $\theta(t)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como Γ é regular e fechada, é parametrizada por um caminho métrico $\gamma : [0, L] \to \mathbb{C}$ que verifica $\gamma'(0) = \gamma'(L)$. Pela Proposição 4.51, a função argumento verifica:

$$e^{i\theta(L)} = \gamma'(L) = \gamma'(0) = e^{i\theta(0)}.$$

Pelas propriedades de periodicidade das funções trigonométricas, é imediato a existência de um inteiro n_Γ que verifica:

$$\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n_\Gamma,$$

como pretendido. A última afirmação é evidente uma vez que escolhas diferentes de θ diferem por uma parcela constante. □

Léxico O número n_Γ deste Corolário chama-se o *índice* de Γ ou *número de rotação* de Γ.

Note-se que o número de rotação não depende da parametrização escolhida para Γ, porque é definido em termos de parametrizações métricas que são essencialmente únicas.

O seguinte teorema mostra que, alem disso, a menos do factor 2π, o índice coincide com a *curvatura total.*

TEOREMA 4.53. *(Curvatura total) Seja Γ uma curva fechada regular, com curvatura total $K(\Gamma)$. Então:*

$$n_\Gamma = \frac{K(\Gamma)}{2\pi}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição anterior, uma vez escolhida uma parametrização métrica γ de Γ, temos $\kappa = \theta'$. Assim:

$$K(\Gamma) = \int_0^L \kappa(t)\,dt = \int_0^L \theta'(t)\,dt = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi n_\Gamma,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo em $\mathbb{R}$. □

OBSERVAÇÃO 4.54. Este resultado mostra também que a curvatura total de uma curva regular não depende da sua parametrização. (compare-se o Exercício 4.47).

Assim, concluímos também que a curvatura total de uma curva apenas depende do seu número de rotação. Em particular, obtemos o teorema de Hopf cuja demonstração é mais difícil do que parece, estando relacionado com o famoso teorema da curva de Jordan. Esboça-se uma possível demostração no apêndice, usando aproximações poligonais.

TEOREMA 4.55. *(Hopf) Sendo Γ uma curva regular, fechada e simples, então $n_\Gamma = \pm 1$.*

COROLÁRIO 4.56. *A curvatura total de uma curva regular, fechada e simples, é $\pm 2\pi$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue de imediato do Teorema 4.53. □

O próximo resultado mostra que o número de rotação de uma curva fechada regular é insensível a pequenas perturbações.

PROPOSIÇÃO 4.57. *Seja $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável com $\eta(a) = \eta(b) = \eta'(a) = \eta'(b) = \mathbf{0}$, e seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ um caminho regular fechado que parametriza a curva Γ. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o caminho $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t) + \varepsilon\eta(t)$ é fechado regular, e*

$$n_\Gamma = n_{\tilde{\Gamma}},$$

onde $\Gamma = (\gamma)$ e $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma})$.

DEMONSTRAÇÃO. As condições $\eta(a) = \eta(b) = \eta'(a) = \eta'(b) = \mathbf{0}$ garantem que, sendo γ fechado regular, o mesmo ocorre com $\tilde{\gamma}$, uma vez que:

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t) + \varepsilon\eta'(t), \qquad \forall t \in [a,b]$$

[Note-se, no entanto, que $\tilde{\gamma}$ não é necessariamente métrico, ainda que γ o seja]. Como o número de rotação é determinado pela curvatura total, que é função diferenciável das derivadas dos caminhos (γ', γ'' num caso, e $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$ no outro) temos forçosamente $\tilde{\kappa}$ aproximadamente igual a κ, e portanto $n_{\tilde{\Gamma}}$ aproximadamente igual a n_Γ. Por exemplo, numa notação que não necessita de explicitação:

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{||\tilde{\gamma}'||^3}\begin{vmatrix} \tilde{x}' & \tilde{x}'' \\ \tilde{y}' & \tilde{y}'' \end{vmatrix} = \frac{1}{||\gamma' + \varepsilon\eta'||^3}\left(\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} + O(\varepsilon)\right) = \kappa + O(\varepsilon).$$

Uma vez que ambos os números de rotação são inteiros (porque as curvas são fechadas), obtemos $n_\Gamma = n_{\tilde{\Gamma}}$, para ε suficientemente pequeno. □

EXERCÍCIO 4.58. Mostre que, para um caminho escrito na forma polar $\gamma(t) = r(t)e^{i\alpha(t)}$ com $r(t) > 0$, verifica-se:

$$\gamma'(t) = \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\alpha'(t)\right)\gamma(t).$$

Sumário 4.3 *Conceitos base*: vector normal, curvatura orientada, função argumento, número de rotação; curvatura total. *Resultados fundamentais*: curvatura total de uma curva fechada, teorema de Hopf.

4.4. Curvas no Espaço

Vamos agora estudar mais aprofundadamente as curvas em $\mathbb{R}^3$. A partir de agora vamos sempre assumir que os nossos caminhos são métricos, excepto quando expressamente indicado. Da mesma forma, todas as derivadas são calculadas em ralação ao parâmetro do comprimento de arco.

DEFINIÇÃO 4.59. Seja Γ uma curva regular em $\mathbb{R}^3$ com parametrização métrica $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : [0, L] \to \mathbb{R}^3$, e vector velocidade (unitário) $v = \gamma'$. A função $k : [0, L] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\kappa = ||\gamma''||$$

é chamada a curvatura de Γ. Sempre que $\kappa \neq 0$ define-se o vector normal (unitário) a Γ por

$$n = \frac{\gamma''}{\kappa} = \frac{v'}{\kappa},$$

e o vector binormal por

$$b = v \times n.$$

PROPOSIÇÃO 4.60. *Quando $\kappa \neq 0$, o triplo (v, n, b) forma uma base ortonormada de vectores em $\mathbb{R}^3$. Além disso, a base está orientada (o determinante da matriz com as colunas nesta ordem é $+1$).*

DEMONSTRAÇÃO. Os vectores v e n têm norma 1 por definição (estamos a assumir $\kappa \neq 0$). Eles são ortogonais devido a:

$$0 = \frac{d}{ds}(v \cdot v) = 2(v' \cdot v) = 2(\gamma'' \cdot v) = 2\kappa(n \cdot v). \tag{6}$$

Assim, também $b = v \times n$ é ortogonal ao plano definido por (v, n) e tem norma 1 porque

$$||b|| = ||v \times n|| = ||v||\,||n||\,|\sin\theta| = 1,$$

sendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ o ângulo entre v e n. □

O triplo ortonormado (v, n, b) é chamado o referencial de Frenet.

DEFINIÇÃO 4.61. Seja Γ curva com parametrização métrica $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$, e $s \in [0, L]$ com $\kappa \neq 0$. O número real

$$\tau = n' \cdot b,$$

chama-se torção de Γ em γ.

OBSERVAÇÃO 4.62. Tal como a curvatura mede a rapidez com que a direcção de v varia ao longo do tempo, τ mede a rapidez com que a curva γ se afasta do plano osculante definido por (v, n).

PROPOSIÇÃO 4.63. *Sempre que $\kappa \neq 0$ temos:*

$$|\tau| = ||b'||.$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando o facto que (v, n, b) é base ortonormada, temos:

$$b' = \big(b' \cdot v\big)\, v + \big(b' \cdot n\big)\, n + \big(b' \cdot b\big)\, b. \tag{7}$$

Um argumento semelhante a 6, implica $b \perp b'$, e usando:

$$0 = \frac{d}{ds}(b \cdot v) = b' \cdot v + b \cdot v' = b' \cdot v + \kappa\,(b \cdot n) = b' \cdot v$$

mostra-se que o vector b' está na direccção definida por n. Além disso, temos $\tau = -b' \cdot n$ pois:

$$0 = \frac{d}{ds}(b \cdot n) = \big(b' \cdot n\big) + \big(b \cdot n'\big) = \big(b' \cdot n\big) + \tau. \tag{8}$$

Assim,

$$||b'|| = |\,\big(b' \cdot n\big)\, n| = |b' \cdot n| = |\tau|,$$

como pretendido. □

TEOREMA 4.64. *Para cada $s \in [0, L]$ com $\kappa \neq 0$, verifica-se:*

$$\begin{bmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ n \\ b \end{bmatrix}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A primeira linha $v' = \kappa n$ segue da definição de κ. A terceira linha segue das Equações (7) e (8). Finalmente:

$$n' = (n' \cdot v)v + (n' \cdot n)n + (n' \cdot b)b = -(v' \cdot n)v + 0 + \tau b = -\kappa v + \tau b,$$

como previsto. □

TEOREMA 4.65. *Seja $L > 0$ e $\kappa, \tau : [0, L] \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, com $\kappa > 0$. Então existe um caminho métrico $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ cuja curvatura e torção são dadas por κ e por τ, respectivamente. Esta curva é única, a menos de isometrias directas de $\mathbb{R}^3$.*

DEMONSTRAÇÃO. Este resultado é uma consequência do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Vejamos a unicidade, e deixamos a existência para o leitor. Sejam γ e $\tilde{\gamma}$ dois caminhos métricos com as mesmas funções curvatura e torção e vamos provar que as respectivas curvas são isométricas. Seja $t_0 \in [0, L]$ um ponto e (v_0, b_0, n_0) $(\tilde{v_0}, \tilde{b_0}, \tilde{n_0})$ as respectivas bases. Há uma isometria T que envia $\gamma(0)$ em $\tilde{\gamma}(0)$ (os pontos iniciais) e uma base na outra. Assim, podemos assumir que $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ e que as bases são a mesma, no ponto inicial da curva, e queremos mostrar que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ para qualquer $t \in [0, L]$. Agora, pelas

fórmulas de Frenet,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||v-\tilde{v}||^2+||n-\tilde{n}||^2+||b-\tilde{b}||^2\right) &= (v-\tilde{v})\cdot(v'-\tilde{v}')+(n-\tilde{n})\cdot(n'-\tilde{n}')+\\ &\quad +(b-\tilde{b})\cdot(b'-\tilde{b}')=\\ &= -\kappa(v\cdot\tilde{n}+\tilde{v}\cdot n)+n\cdot(\kappa\tilde{v}-\tau\tilde{b})+\tilde{n}\cdot(\kappa v-\tau b)+\\ &\quad +\tau(b\cdot\tilde{n}+\tilde{b}\cdot n)=\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $v=\tilde{v}$ etc. Assim, $\gamma=\tilde{\gamma}+w$, onde w é vector constante, e portanto nulo. □

EXERCÍCIO 4.66. Mostre que, dada uma função curvatura $\kappa : [0,L] \to \mathbb{R}$ (não se exige $\kappa > 0$) existe caminho métrico γ, no plano cuja curvatura é dada por κ.

4.5. Apêndice: Curvatura total de curvas fechadas

Neste apêndice, mais técnico que secções anteriores, mostramos alguns resultados globais de curvas em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ nomeadamente sobre a curvatura total das curvas fechadas. Usam-se alguns métodos de topologia geral, pelo que as demonstrações podem ser saltadas numa primeira leitura.

4.5.1. Igualdade entre curvatura total e rotação total. Podemos aproximar uma curva C^∞, regular, por uma curva poligonal pelo Teorema 4.39. Reciprocamente, podemos aproximar uma curva poligonal, por uma outra diferenciável, colocando pequenos arcos de circunferência no lugar dos vértices. Cada vértice contribui com uma curvatura igual ao ângulo externo. Esta técnica é muito útil na prática, para desenvolver algoritmos computacionais para o estudo de curvas no plano, mas também serve para demonstrar alguns resultados clássicos.

Começamos pelo teorema análogo ao de Hopf para curvas poligonais.

TEOREMA 4.67. *Uma curva poligonal fechada e simples tem a soma dos ângulos externos igual a* $\pm 2\pi$.

DEMONSTRAÇÃO. Este resultado é elementar quando Γ é um triângulo, ou mais geralmente, a fronteira de um polígono convexo. Seja $\Gamma = \Gamma_m = [p_1, p_2, \cdots, p_m, p_1]$ curva poligonal simples e fechada, com m vértices, e seja S_m a soma dos ângulos externos de Γ_m. Como a curva $\Gamma_{m-1} := [p_1, p_2, \cdots, p_{m-1}, p_1]$ e a curva Γ_m diferem por um triângulo, um cálculo elementar (baseado na soma dos ângulos internos do triângulo ser igual a π), mostra que a soma dos ângulos externos se mantém, ou seja $S_m = S_{m-1}$. Note-se que Γ_{m-1} pode deixar de ser simples, mas o resultado mantém-se. Continuando desta forma, chegamos à curva triangular $\Gamma_3 = [p_1, p_2, p_3, p_1]$ com $S_3 = \pm 2\pi$, e portanto $S_m = \pm 2\pi$ como pretendido. □

LEMA 4.68. *Seja* Γ *a concatenação de 2 segmentos de recta:* $\Gamma = [p_1, p_2, p_3]$ *e seja* Γ' *a curva obtida "arredondando" o vértice* p_2. *Mais precisamente* Γ' *obtem-se substituindo* $\Gamma \cap \mathbb{D}_r$, *sendo* $\mathbb{D}_r$ *um pequeno disco centrado em* p_2, *por um arco de circunferência de modo a manter regularidade. Então:*

$$K_{\Gamma'} = \alpha,$$

sendo α *o ângulo externo do polígono* Γ.

Agora podemos mostrar o teorema de Hopf para curvas fechadas regulares.

DEMONSTRAÇÃO. (do teorema de Hopf - Teorema 4.55) Aproximemos a curva Γ por uma curva poligonal simples Γ_p. Aproximemos a curva poligonal Γ_p por uma curva arredondada simples Γ'. Então, pelo Teorema anteiror:

$$K_{\Gamma'} = \pm 2\pi,$$

(pois $K_{\Gamma'}$ coincide com a soma de todos os ângulos externos do polígono P, pelo Lemma anterior). As curvas Γ e Γ' são pequenas perturbações uma da outra. Assim, o teorema segue da Proposição 4.57: $n_\Gamma = n_{\Gamma'}$. □

O seguinte resultado é intuitivo, embora não completamente elementar.

TEOREMA 4.69. *A fronteira de um polígono é uma curva poligonal simples e fechada. Reciprocamente, qualquer curva poligonal fechada e simples é a fronteira de um polígono.*

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação segue da definição de polígono, como conjunto do plano cuja fronteira é formada por segmentos de recta. O facto de que a curva obtida é simples e fechada deixa-se para o leitor. Para mostrar o recíproco, comecemos por uma curva poligonal fechada e simples $\Gamma = [p_0, p_1, \cdots, p_m] \subset \mathbb{R}^2$, onde $p_m = p_0$. Como Γ é um conjunto compacto (ou seja, fechado e limitado), podemos assumir, se necessário adicionando um vértice, que há um segmento de recta (sem perda de generalidade $[p_0, p_1]$) de tal forma que Γ está toda contida num dos semiplanos S definidos pela recta que passa em p_0 e p_1. Sendo p' o ponto médio deste segmento e $p \in S$ arbitrário,

o conjunto $[p', p] \cap \Gamma$ é geralmente finito (para um conjunto denso de pontos $p \in S$) e não contém nenhum vértice de Γ. Nesses casos definimos

$$n_p = |[p', p] \cap \Gamma|.$$

Note-se que $n_p \geq 1$, porque $p' \in \Gamma$. Defina-se também o subconjunto:

$$P := \{p \in S : n_p \text{ é ímpar}\}.$$

Então $\overline{P}$ é um polígono e a sua fronteira é Γ. De facto, $p \in \partial\overline{P}$ se e só se n_p muda de par a ímpar ou vice-versa o que significa que é em p que se cruza Γ. Resta mostrar que $\overline{P}$ é conexo o que se consegue ligando todos os pontos onde n_p é ímpar ao percorrer uma semi-recta $r \subset S$ começando em p'. Temos $n_{p'} = 1$ e percorremos a semi-recta que contém pontos onde n_p é par, mas neste sub-intervalo substituimos o percurso em r pelo menor percurso em Γ que une ao ponto $p'' \in r$ com $n_{p''} = 3$ e assim sucessivamente. □

4.5.2. O teorema da curva de Jordan. Uma curva de Jordan é uma curva simples e fechada. Finalmente, enunciamos e mostramos o teorema da curva de Jordan no caso mais simples de curvas regulares, embora seja válido para curvas apenas contínuas[3]

TEOREMA 4.70. *(Teorema da curva de Jordan) Se Γ é uma curva regular simples e fechada, então divide o plano em duas regiões: interior e exterior.*

DEMONSTRAÇÃO. Se Γ é uma curva poligonal fechada e simples, o resultado é uma consequência da Proposição 4.69, pois a componente interior é o poligono P cuja fronteira é Γ (e a exterior é o interior de $\mathbb{R}^2 \backslash P$). Se Γ é curva regular simples, o resultado segue do resultado para uma aproximação poligonal $\Gamma_{\mathscr{P}}$ suficientemente fina. □

4.5.3. Curvatura total em $\mathbb{R}^3$ e o teorema de Fary-Milnor. Da mesma forma que para curvas no plano, podemos definir curvatura total de uma curva em $\mathbb{R}^3$. No entanto, neste caso a curvatura nunca pode ser negativa. De facto, é fácil mostrar que vale, pelo menos 2π, a curvatura de uma circunferência. Mais extraordinário é o teorema de Fary-Milnor que caracteriza as curvas fechadas e simples em $\mathbb{R}^3$ cuja curvatura não excede 4π: não podem ser nós - curvas entrelaçadas !!

DEFINIÇÃO 4.71. Seja Γ uma curva com parametrização métrica $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$. O número não negativo:

$$K_\Gamma := \int_0^L \kappa \, ds = \int_0^L ||\gamma''|| \, ds,$$

designa-se a curvatura total de Γ.

PROPOSIÇÃO 4.72. *Se Γ é uma curva simples e fechada, então $K_\Gamma \geq 2\pi$.*

Uma curva fechada e simples em $\mathbb{R}^3$ chama-se um nó. Este nó diz-se *trivial* se existe uma deformação contínua desta curva de modo a obter uma circunferência, sem nunca a cortar nem admitir auto-intersecções.

TEOREMA 4.73. *(Teorema de Fary-Milnor) Se Γ é um nó fechado não trivial, então*

$$K_\Gamma \geq 4\pi.$$

4.6. Problemas

4.1 Seja $\gamma(t) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)$, com $t \in [-2, 2]$. Esboce a curva $\Gamma = (\gamma)$ e mostre que não é simples. Determine γ' e γ'' e os pontos em que se anulam. γ é um caminho regular?

4.2 Seja $\gamma(t) = (t - \sin t, \cos t - 1)$, $t \in [-\pi, 3\pi]$. Esboce a curva $\Gamma = (\gamma)$, chamada ciclóide. Mostre que é simples, mas não regular.

[3] O caso mais geral de curvas apenas contínuas, que se tornou um famoso problema, deu origem a um grande avanço da topologia, e o seu tratamento sai fora do âmbito destas notas.

4.3 Considere o gráfico de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}$. Mostre que Γ é uma curva regular se f é diferenciável, e determine o seu comprimento em função de $f'(x)$.

4.4 Considere a elipse $E = \{(x,y) : 4x^2 + 3(y-2)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Determine um caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ cuja curva é E, com $\gamma(0) = \gamma(1) = (\frac{1}{2}, 2)$ e que seja regular. Determine $\gamma'(t)$ para todo o $t \in [0,1]$.

4.5 Sejam $r, a > 0$ e $\gamma(t) := (re^{-at}\cos t,\ re^{-at}\sin t)$ com $t \in [0, \infty[$.
(a) Mostre que γ é um caminho regular.
(b) Verifique que é mensurável, isto é $\lim_{L\to\infty} \int_0^L ||\gamma'(t)|| dt$ existe e é finito.

4.6 Considere o helicóide $\gamma(t) = (4\cos t,\ 4\sin t,\ 3t)$ com $t \in [-2,2]$. Determine um caminho métrico com a mesma curva, ou seja $\tilde{\gamma}$ com $s \in [0,L]$, $||\tilde{\gamma}'|| = 1$ e $(\tilde{\gamma}) = (\gamma)$.

4.7 Seja $n \geq 1$ e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável com $\gamma''(t) = 0$ para todo o $t \in [a,b]$. Mostre que existem $p, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma(t) = p + tv$, para todo o t.

4.8 Seja γ um caminho mensurável de comprimento $C(\gamma)$, entre p e q. Mostre que $C(\gamma) \geq ||p - q||$.

4.9 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ um caminho regular. Mostre que $||\gamma(t)||$ é constante se e só se o produto interno $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle$ é nulo.

4.10 Seja γ um caminho métrico no plano e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria directa. Mostre que $T \circ \gamma$ é também um caminho métrico, com o mesmo comprimento e a mesma função curvatura que γ.

4.11 Considere a catenária dada por $\gamma(t) = (t, \cosh t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [-2,2]$. Determine o seu comprimento e a curvatura total.

4.12 Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ um caminho regular (não necessariamente métrico), $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Verifique a seguinte fórmula para a curvatura orientada:

$$\kappa(t) := \frac{1}{||\gamma'(t)||^3} \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ x'(t) & y''(t) \end{vmatrix}.$$

4.13 Seja $\gamma = (x,y)$ um caminho regular no plano, com $\kappa(t) \neq 0$. Define-se o *caminho evoluto* de γ como o caminho $E(t) := \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$, onde $n(t)$ é a normal unitária $n(t) = (-y(t), x(t))$. Determine o caminho evoluto da catenária $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, $t \in [-2,2]$.

4.14 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere a curva do seu gráfico $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, f(t))$. Mostre a fórmula para a sua curvatura total:

$$K_\Gamma = \int_a^b f''(t)(1 + (f'(t))^2)^{-\frac{3}{2}} dt.$$

4.15 Considere a curva dada por $\gamma(t) = r\cos 3t\,(\cos t, \sin t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mostre que é uma curva regular fechada e esboce-a. Determine a sua curvatura total.

4.16 Seja $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ regular com curva Γ, com $\kappa(0) \neq 0$. [Este exercício mostra que há uma única circunferência que melhor aproxima Γ em $\gamma(0)$, e que $|\kappa(0)| = 1/r$, onde r é o raio dessa circunferência].
(a) Escrevendo $\gamma = (x,y)$, e supondo $\gamma'(0) = (1,0)$, mostre que $\kappa(0) = y''(0)$.
(b) Seja $\eta = (\eta_1, \eta_2) : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, uma parametrização da circunferência de raio $r > 0$ com $\eta(0) = \gamma(0)$ e $\eta'(0) = \gamma'(0)$. Mostre que $|\eta_2''(0)| = 1/r$.

4.17 Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Determine o referencial de Frenet, em função de $t \in \mathbb{R}$.

4.18 Sejam $r, h > 0$ e considere a hélice $\gamma(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ ht)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine o referencial de Frenet, em função de $t \in \mathbb{R}$ e mostre que a curvatura e a torção são constantes.

4.19 Seja $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ um caminho métrico. Prove que γ tem torção nula se e só se a curva $\Gamma = (\gamma)$ está contida num plano.

4.20 Seja $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ um caminho métrico com velocidade: $\gamma'(t) = \frac{1}{2}((1+t)^{1/2}, -(1-t)^{3/2}, \sqrt{2}t)$. Determine $\gamma(t)$, $\kappa(t)$ e o referencial de Frenet.

4.21 Seja $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ um caminho (não necessariamente métrico) e $M(s)$ a matriz cujas colunas são $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ e $\gamma'''(t)$. Mostre que a torção é dada por

$$\tau(t) = \frac{\det M(t)}{||\gamma'(t) \times \gamma''(t)||^2}.$$

4.22 Seja Γ uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma(t)$, $t \in [0, L]$ com $\kappa, \tau \neq 0$, inscrita na esfera unitária (isto é $||\gamma(t)|| = 1$ para todo $t \in [0, L]$). Mostre que se verifica:

$$\kappa^2\tau^2(\kappa^2 - 1) = (\kappa')^2.$$

CAPíTULO 5

Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Vamos agora estudar propriedades geométricas das superfícies em $\mathbb{R}^3$. Alguns dos conceitos desenvolvidos para curvas têm análogos neste contexto, tendo em conta a passagem da dimensão 1 para a dimensão 2. Assim, por exemplo, em vez de comprimento, temos áreas, em vez de rectas tangentes temos um plano tangente, etc.

No entanto, a teoria das superfícies é bastante mais sofisticada e conduziu ao desenvolvimento da geometria diferencial e às suas várias aplicações. Em particular, a consideração de *curvas dentro de uma dada superfície* leva naturalmente à necessidade de distinguir entre propriedades geométricas que podemos considerar *intrínsecas* - dependentes apenas das distâncias entre pontos na superfície - e outras que são *extrínsecas*, ou seja, dependentes da forma como a superfície se encontra mergulhada no espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

Um exemplo notável da importância das propriedades intrínsecas das superfícies (que não tem análogo na teoria das curvas), e que se colocou com premência na história da ciência, nomeadamente na cartografia, é o facto de não ser possível elaborar um mapa da superfície terrestre que preserve todas as distâncias entre pares de pontos. C. F. Gauss foi o primeiro matemático a perceber rigorosamente o facto desta impossibilidade estar intimamente relacionada com o conceito de curvatura, ficando tão agradado com o seu resultado que o chamou de *Theorema Egregium*. A apresentação deste resultado e a sua análise é um dos objectivos destas notas.

5.1. Mapas regulares

Tal como no caso de curvas, convém distinguir uma *superfície*, ou seja um conjunto bidimensional (num sentido que introduzimos adiante) da *função* que a *parametriza*.

Assim, um *mapa* será uma *função* de dois parâmetros que define um subconjunto bidimensional no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, enquanto uma *superfície* em $\mathbb{R}^n$ será a *imagem* de um certo mapa. Vamos focar-nos no estudo de superfícies em $\mathbb{R}^3$, por ser o caso mais simples, e por termos à nossa disposição várias ferramentas de cálculo a várias variáveis, como por exemplo, o produto externo de vectores.

Para os *parâmetros* vamos usar as letras s, t, e vamos considerar funções $\phi = \phi(s,t)$ com $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ (tipicamente, $n = 3$). As propriedades geométricas da imagem $\phi(U)$ em $\mathbb{R}^n$ podem ser estudadas a partir das derivadas de ϕ, pelo que vamos considerar subconjuntos *abertos e conexos* $U \subset \mathbb{R}^2$, aos quais, para abreviar, chamamos *regiões*.

DEFINIÇÃO 5.1. Uma **região** $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, conexo e não vazio. Uma aplicação $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, definida na região U diz-se **diferenciável** se existem, e são contínuas, as derivadas de *todas as ordens* em todos os pontos $(s,t) \in U$.

Notação As *coordenadas* de ϕ são escritas como:

$$\phi(s,t) = (x(s,t),\, y(s,t),\, z(s,t)).$$

A *derivada* de $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ no ponto $\mathbf{u} = (s,t)$, pode ser escrita como matriz, que denotaremos por

$$D_{\mathbf{u}}\phi$$

com 3 linhas e 2 colunas. Pela convenção usual, cada linha corresponde a um *gradiente*, e cada coluna a uma *derivada direccional*:[1]

$$D_{\mathbf{u}}\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} x \\ \nabla_{\mathbf{u}} y \\ \nabla_{\mathbf{u}} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} & \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ | & | \end{bmatrix}.$$

O vector $\frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t}$, o produto externo das colunas de $D_{\mathbf{u}}\phi$, está bem definido em $\mathbb{R}^3$, para qualquer dos pontos $\mathbf{u} = (s,t) \in U$. A seguinte definição de *mapa regular* é o conceito análogo, para dimensão 2, da noção de *caminho regular*.

DEFINIÇÃO 5.2. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ uma região. Um **mapa regular** é uma aplicação diferenciável $\phi : U \to \mathbb{R}^3$, tal que o vector $\frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t}$ não se anula (em nenhum ponto de U).

OBSERVAÇÃO 5.3. Tal como um *caminho* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ define uma *curva*, a sua imagem $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$, um *mapa regular* $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ define uma *superfície*. Convém, como no caso das curvas, distinguir os casos em que o mapa ϕ não é injectivo, porque correspondem a superfícies que se "auto-intersectam".

EXEMPLO 5.4. (1) O plano $\pi = \{ax + by + cz = d\}$ pode ser parametrizado de duas formas naturais.
(i) Com 2 vectores tangentes geradores, e um ponto de π: $\phi(s,t) = p_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$
(ii) Escrevendo uma das variáveis em função das outras duas, que se tomam como os próprios parâmetros.
(2) A esfera em coordenadas esféricas: note-se que não é regular nos 2 pólos. A inversa da projecção estereográfica é regular, mas não atinge o pólo norte.

Uma classe bastante geral de mapas regulares obtém-se como *gráficos de funções*.

EXERCÍCIO 5.5. (Gráficos de funções) Mostre que um gráfico de uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$ corresponde sempre a um mapa regular.

Há também casos de "objectos bidimensionais" que não são imagem de mapas regulares.

EXEMPLO 5.6. O cone $z^2 = x^2 + y^2$.

5.1.1. Relação entre mapas regulares e caminhos regulares. Tal como no caso dos caminhos, os vectores $\frac{\partial \phi}{\partial s} = \phi_s$ e $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi_t$ são tangentes à imagem $\phi(U) \subset \mathbb{R}^3$. De facto, qualquer mapa regular define uma infinidade de caminhos-s e caminhos-t:

$$\sigma_t(s) := \phi(s,t), \qquad \tau_s(t) := \phi(s,t).$$

PROPOSIÇÃO 5.7. *Dado um mapa regular $\phi : U \to \mathbb{R}^3$, e $\mathbf{u} = (s,t) \in U$, os caminhos σ_t e τ_s definidos acima, são caminhos regulares.*

DEMONSTRAÇÃO. É uma verificação elementar, uma vez que ambos

$$\sigma_t' = \phi_s \text{ e } \tau_s' = \phi_t$$

não se anulam (caso contrário $\phi_s \times \phi_t = 0$). Note-se que, para cada s fixo, o parâmetro t deve pertencer a um intervalo de tal forma que $(s,t) \in U$, o que é certamente possível pois há um disco aberto em U, centrado em (s,t). □

5.1.2. Plano tangente e vector normal. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ um mapa regular. Para simplificar, assumimos que o aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contém a origem 0, e seja $\phi(0) = p \in \mathbb{R}^3$. Pela fórmula de Taylor, para vectores $\mathbf{u} \in U$ temos:

$$\phi(u) = p + D_0\phi u + O(|u|^2),$$

pelo que $\{p + D_0\phi u : u \in \mathbb{R}^2\}$ é o plano que melhor aproxima $\phi(U)$ perto de p, a nível infinitesimal. Chamamos-lhe o plano tangente a $\phi(U)$ em $p \in \phi(U)$ e denotamo-lo por $T_p\phi(U)$

[1] Naturalmente, quando não explicitamente indicado, as derivadas devem ser calculadas no ponto $\mathbf{u} = (s,t)$

DEFINIÇÃO 5.8. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ um mapa regular. O **plano tangente** a $\phi(U)$ em $p \in \phi(a)$ é dado por

$$T_p\phi(U) := \left\{p + D_a\phi u : u \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Mais interessante é que, para um mapa regular temos também a noção de *vector normal*.

PROPOSIÇÃO 5.9. *O vector* $\frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t}$ *é perpendicular ao plano tangente.*

DEMONSTRAÇÃO. O vector $\frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t}$ é o produto exterior de 2 vectores tangentes e não se anula. Assim, é normal a $\phi(U)$. □

5.1.3. Área de um mapa regular. Tal como definimos comprimento de um caminho, vamos definir área de um mapa.

DEFINIÇÃO 5.10. Sendo $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ um mapa regular, a área de ϕ é definida por

$$A(\phi) := \iint_U ||\frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t}|| \, ds\, dt.$$

EXEMPLO 5.11. (1) Coordenadas esféricas e a área de um oitavo de esfera.
(2) Área de parte de um cilindro.

PROPOSIÇÃO 5.12. *A área é independente da parametrização.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da fórmula de mudança de variável, em conjunção com o exercício 5.9 □

Desta forma, podemos dizer que a área é uma grandeza associada ao conjunto $\phi(U) \subset \mathbb{R}^3$ e não apenas à função ϕ.

Outra questão importante é que a *totalidade* da esfera não pode ser obtida como a imagem de único um mapa regular!! (Tente descobrir porquê!) Este tipo de dificuldade não apareceu no estudo das curvas: qualquer curva fechada (tal como as circunferências, elípses, etc) é obtida como imagem de um caminho *regular*.

5.2. Superfícies regulares

Como vimos, há mapas que não são injectivos ou que têm singularidades. Por outro lado, há superfícies, como a esfera, que não podem ser definidas na sua totalidade, como a imagem de um único mapa regular. Vamos então definir *superfícies regulares* como imagem de um ou vários mapas regulares que se "colam" de forma adequada e sem singularidades.

DEFINIÇÃO 5.13. Uma **superfície elementar** em $\mathbb{R}^3$ é a imagem de um mapa regular injectivo $\phi : U \to \mathbb{R}^3$.

Usamos o conceito de parametrização da mesma forma que no caso das curvas.

Léxico Dizemos que o mapa ϕ *parametriza* a superfície $\phi(U) \subset \mathbb{R}^3$, ou que $\phi(U)$ é parametrizada por ϕ.

EXERCÍCIO 5.14. Mostre que qualquer *gráfico* de uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$ é uma superfície elementar. Dê um exemplo de uma superfície elementar que não é um gráfico.

EXEMPLO 5.15. O cone não é uma superfície elementar.

Tal como no caso das curvas, para cada superfície existem inúmeras formas diferentes de parametrzar uma superfície. Por exemplo, até no caso simples da esfera temos várias parametrizações naturais.

EXEMPLO 5.16. A esfera dada por 2 projecções estereográficas, ou por 6 projecções coordenadas.

OBSERVAÇÃO 5.17. A noção de superfície elementar não é suficiente para abarcar algumas das superfícies mais simples, como a esfera, entre muitas outras superfícies importantes. De facto, pode provar-se que esfera não é uma superfície elementar! No entanto, este resultado está fora do âmbito deste livro.

De modo a poder incluir estes casos, fazemos então a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 5.18. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma **superfície regular** se para qualquer ponto $p \in S$ existe uma vizinhança V de $p \in S$, tal que $S \cap V$ é uma superfície elementar.

Léxico Sendo S uma superfície regular, e $p \in S$, dizemos que o mapa regular $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ *é uma parametrização de S em p*, se ϕ é *injectiva* e $p \in \phi(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$.

EXERCÍCIO 5.19. Mostre que a esfera é uma superfície regular.

EXEMPLO 5.20. Há mapas regulares que não definem superfícies regulares. Por exemplo, o caso em que ϕ não é injectivo.

PROPOSIÇÃO 5.21. *Um mapa regular ϕ define uma superfície regular, se é injectivo.*

DEMONSTRAÇÃO. ... □

No exercício 5.14, vimos que um gráfico define uma superfície (elementar). Reciprocamente, não é muito difícil verificar que, localmente uma superfície coincide sempre com o gráfico de uma dada função. Deixamos ao leitor a tarefa de tornar esta afirmação precisa e de a verificar.

5.2.1. Superfícies de nível. O problema com a definição de superfície regular S é que podemos, em princípio, necessitar de uma infinidade (numerável ou não!) de mapas para cobrir S. No entanto, em muitos casos práticos, conseguimos escolher parametrizações com apenas um ou dois mapas. Por outro lado, temos um outro critério baseado na existência de funções definidas implicitamente, o que nos leva à noção de *superfície de nível*.

DEFINIÇÃO 5.22. Seja V um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $F : V \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. Diz-se que $p \in V$ é um **ponto regular** para F se a transformação linear D_pF tem *característica máxima*. Caso contrário p diz-se **ponto singular** para F.

EXEMPLO 5.23. (O caso $m = 1$) Um ponto $p \in V \subset \mathbb{R}^n$ é regular para $F : V \to \mathbb{R}$, se o gradiente $\nabla_p F$ não se anula.

PROPOSIÇÃO 5.24. *Seja $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e $p \in F^{-1}(0) \subset V$ um ponto regular para F. Então existe uma vizinhança W de p tal que*

$$F^{-1}(0) \cap W = \{p \in \mathbb{R}^3 : \ F(p) = 0\}$$

é uma superfície elementar.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$ ponto regular, com $F(p_0) = 0$. Então $\nabla F \neq 0$ em p_0 e podemos assumir, sem perda de generalidade que $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, existem vizinhanças W de p_0 e U em $\mathbb{R}^2$ e uma função $g : U \to \mathbb{R}$ (a função implícita) tais que

$$F^{-1}(0) \cap W = \{(x, y, g(x, y))\}.$$

Ou seja, $z = g(x, y)$ é equivalente a $(x, y, z) \in F^{-1}(0)$ para todo $(x, y, z) \in W$ (e podemos tomar $U = \pi_3(V)$). Além disso g é diferenciável e $g(x_0, y_0) = z_0$. Finalmente, definindo $\phi(s, t) = (s, t, g(s, t))$, $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ temos que

$$\phi(U) = F^{-1}(0) \cap W,$$

com $\frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t}(p_0) \neq 0$. Assim, $F^{-1}(0) \cap W$ é uma superfície elementar. □

COROLÁRIO 5.25. *Seja $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável de forma a que todos os pontos de $F^{-1}(0)$ sejam regulares. Então $S := F^{-1}(0)$ é uma superfície regular simples, e $\nabla_p F$ é um vector normal a S em p.*

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação segue da proposição anterior, notando que a superfície que se obtém é parametrizada localmente por mapas injectivos. A segunda verifica-se considerando a função $F \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F \circ \phi(s, t) = F(s, t, g(s, t)) \equiv 0.$$

Derivando esta função constante obtemos:

$$(\nabla_{\phi(\mathbf{u})}F)\circ D_{\mathbf{u}}\phi = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} | & | \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} & \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ | & | \end{array}\right] = [0,0],$$

o que implica que $\nabla_p F$ é ortogonal a ambos os vectores tangentes $\phi_s = \frac{\partial \phi}{\partial s}$ e $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$. □

Léxico Se $F : V \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, e $p \in S := F^{-1}(0)$ verifica

$$\nabla_p F \neq 0,$$

então F chama-se uma *função definidora* de S em p.

5.3. As formas fundamentais de um mapa

Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ um mapa regular e $S = \phi(U)$ a superfície elementar que ele define. Ao contrário do que acontecia com curvas, que sempre podem ser parametrizadas por *comprimento de arco*, não existe sempre uma parametrização *canónica* ou *natural* de S: para uma dada superfície S, pode não existir nenhuma parametrização ψ de S na qual ψ_s e ψ_t formem um par de vectores ortonormados em todos os pontos (s,t). Por exemplo, este tipo de parametrizações existem para um plano e para um cilíndro, mas não existem para uma esfera!

A forma de analisar esta obstrução está relacionada com uma das mais importantes noções em superfícies: o conceito de curvatura. Nesta secção, definimos as primeira e segunda formas fundamentais associadas a um mapa, instrumentos que permitirão o cálculo das várias curvaturas associadas a uma superfície, relação essa que é deixada para uma secção posterior.

A palavra *forma* refere-se à expressão *forma quadrática*, que é equivalente à noção de produto interno num espaço vectorial. O espaço vectorial de que falamos é o espaço tangente à superfície S num dado ponto. Assim, estas formas quadráticas podem ser vistas como matrizes simétricas, quando temos uma base concreta do espaço tangente, ou como produto interno abstracto, na ausência de tal base explícita.

5.3.1. A primeira forma fundamental. Começamos por definir as formas fundamentais de um dado mapa. Assim, temos os vectores ϕ_s e ϕ_t que são linearmente independentes, quando ϕ é regular.

DEFINIÇÃO 5.26. Seja ϕ um mapa regular. A **primeira forma fundamental** de ϕ é a forma quadrática associada à matriz:

$$g = g_\phi = \left(\begin{array}{cc} ||\phi_s||^2 & \phi_s \cdot \phi_t \\ \phi_t \cdot \phi_s & ||\phi_t||^2 \end{array}\right).$$

Note-se que a matriz g_ϕ é uma função diferenciável $g_\phi : U \to M_2(\mathbb{R})$. Uma vez que o seu uso é muito frequente, por simplicidade, chamamos à própria matriz g_ϕ (em vez da respectiva forma quadrática) a primeira forma fundamental de ϕ.

A primeira forma fundamental é uma matriz simétrica, e invertível.

PROPOSIÇÃO 5.27. *O determinante da primeira forma fundamental g_ϕ, de um mapa regular ϕ, é não nulo. De facto:*

$$\det g = ||\phi_s \times \phi_t||^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue da identidade $||\phi_s \times \phi_t||^2 + (\phi_s \cdot \phi_t)^2 = ||\phi_s||^2\,||\phi_t||^2$, que por sua vez equivale a:

$$||\phi_s||^2\,||\phi_t||^2 \sin^2\theta + ||\phi_s||^2\,||\phi_t||^2 \cos^2\theta = ||\phi_s||^2\,||\phi_t||^2,$$

sendo θ o ângulo entre ϕ_s e ϕ_t. □

EXEMPLO 5.28. Cálculo da primeira forma fundamental da esfera em coordenadas naturais. Seja $\phi :]0,\pi[\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ a parametrização usual de uma esfera de raio $R > 0$:

$$\phi(s,t) := R(\cos s \cos t,\ \cos s \sin t,\ \sin s).$$

Temos

$$\begin{aligned}\phi_s &= R(-\sin s\cos t, -\sin s\sin t, \cos s)\\ \phi_t &= R(-\cos s\sin t, \cos s\cos t, 0)\end{aligned}$$

e portanto

$$||\phi_s||^2 = R^2(\cos^2 s + \sin^2 s) = R^2, \qquad ||\phi_t||^2 = R^2\cos^2 s, \qquad \phi_t\cdot\phi_s = 0.$$

Assim, a primeira forma fundamental de ϕ é:

$$g_\phi = R^2\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \cos^2 s\end{pmatrix}.$$

Estamos interessados em características das superfícies que sejam independentes da parametrização. Ou seja, queremos encontrar propriedades que não dependam do mapa ϕ, e que dependam apenas da superfície imagem $\phi(U)$. Infelizmente, ao contrário do caso das curvas, não há forma de encontrar uma parametrização natural para qualquer superfície. No entanto, há alguns casos especiais que convém salientar, dada a sua importância.

DEFINIÇÃO 5.29. Dizemos que $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ é um **mapa ortonormado** (resp. **ortogonal**) em (s,t) se $g_\phi(s,t)$ é a matriz identidade I_2 (resp. matriz diagonal). A primeira forma fundamental g_ϕ diz-se ortonormada (resp. ortogonal) se for ortonormada (resp. ortogonal) para todo o $(s,t)\in U$.

Veremos que o caso ortogonal é bastante frequente, e o caso ortonormado é muito raro. Há uma noção intermédia que se mostra extremamente importante e que mostraremos estar relacionada com a preservação de ângulos.

DEFINIÇÃO 5.30. Dizemos que $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ é um **mapa conforme** se existe uma função diferenciável $\lambda : U \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$g_\phi = \lambda I_2,$$

onde I_2 é a matriz identidade 2×2.

Desta forma, um mapa ortonormado é conforme e um mapa conforme é ortogonal, e as três noções não coincidem, como podemos ver em exemplos concretos. Apesar de não haverem, em geral, parametrizações canónicas de uma dada superfície, é comum encontrarmos parametrizações de tipos especiais.

OBSERVAÇÃO 5.31. Para verificar se um mapa ϕ é ortogonal basta determinar se $\phi_s\cdot\phi_t$ se anula em todos os pontos de U. E um mapa é conforme se é ortogonal e verifica também $||\phi_s|| = ||\phi_t||$ em U. As coordenadas u, v de uma parametrização conforme chamam-se **isotérmicas**.

EXEMPLO 5.32. A anti-projecção estereográfica $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2\setminus\{N\}$ é conforme.

É um facto que a generalidade das superfícies não admite nenhuma parametrização ortonormada em todos os pontos: em geral, podemos apenas encontrar parametrizações ortogonais adaptadas a um único ponto.

EXEMPLO 5.33. Seja S uma superfície regular e $p\in S$. Mostre que existe uma parametrização ϕ, de S, ortonormada em $p = \phi(s,t)$.

5.3.2. A segunda forma fundamental. Algumas propriedades, como a curvatura, dependem das segundas derivadas de ϕ, assim vamos usar os vectores:

$$\phi_{ss},\quad \phi_{st} = \phi_{ts},\quad \phi_{tt}$$

das segundas derivadas de ϕ em ordem às duas variáveis s,t.

DEFINIÇÃO 5.34. Seja ϕ um mapa regular. A **segunda forma fundamental** de ϕ é forma quadrática associada à matriz:

$$h = h_\phi = \begin{pmatrix} \phi_{ss}\cdot n & \phi_{st}\cdot n\\ \phi_{ts}\cdot n & \phi_{tt}\cdot n\end{pmatrix},$$

onde $n = \frac{\phi_s \times \phi_t}{||\phi_s \times \phi_t||}$ é o vector normal unitária.

Tal como a primeira, a segunda forma fundamental é simétrica, mas h não é necessariamente invertível. A interpretação geométrica de ambas as formas fundamentais é deixada para a próxima secção, tal como a explicação da razão de ser das seguintes definições de curvatura.

DEFINIÇÃO 5.35. Seja ϕ um mapa regular. O **operador curvatura** é:

$$Q = Q_\phi = g_\phi^{-1} h_\phi$$

e a **curvatura escalar** é $K = \det Q = \frac{\det h}{\det g}$. As **curvaturas principais** são os valores próprios do operador curvatura.

À partida, os valores próprios de uma matriz real podem ser números complexos. Na próxima secção veremos que as curvaturas principais são de facto sempre reais, e relacionamo-las com curvaturas de curvas definidas na superfície.

EXEMPLO 5.36. (1) Cálculo de h, Q e K para o mapa regular $\phi = (s, t, st)$.
(2) Cálculo de h, Q e K para o exemplo do cone: curvatura zero.

5.4. Métrica e Curvatura

Na secção anterior vimos como calcular as primeira e segunda formas fundamentais de um dado mapa $\phi : U \to \mathbb{R}^3$, bem como o operador curvatura e a curvatura escalar, como funções dos parâmetros $(s, t) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Estas noções de curvatura foram definidas de forma *ad hoc*. Nesta secção, explicamos estas noções no contexto das próprias superfícies (e não da sua parametrização) e damos a sua interpretação geométrica, que serviu de motivação para as definições.

Começamos pela definição de *espaço tangente* e de *espaço normal* a uma superfície num ponto (compare-se as definições dadas em 5.8 e 5.9, para os mesmos conceitos relativos a um mapa regular).

DEFINIÇÃO 5.37. Seja $S = \phi(U)$ uma superfície elementar e $p \in S$. O **espaço tangente a** S **em** p é o espaço vectorial, bidimensional, gerado por ϕ_s e ϕ_t (calculados no ponto $p = \phi(s_0, t_0)$). O **espaço normal a** S **em** p é o espaço vectorial unidimensional gerado por $\phi_s \times \phi_t$.

Notação: O espaço tangente a S em p denota-se por T_pS e o normal por N_pS.

O próximo exercício mostra que as noções de espaço tangente e normal são independentes da parametrização.

EXERCÍCIO 5.38. Considere dois mapas ϕ e ψ que parametrizam a **mesma** superfície S e seja $p \in S$. Mostre que o espaço tangente, calculado usando ϕ, coincide com o que se calcula usando ψ, e que o mesmo se passa para o espaço normal.

OBSERVAÇÃO 5.39. Nas condições da definição, $\{\phi_s, \phi_t, \phi_s \times \phi_t\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Uma vez que (ϕ_s, ϕ_t) é uma base de T_pS, podemos escrever:

$$\mathbf{v} = a\phi_s + b\phi_t,$$

para $a, b \in \mathbb{R}$, univocamente determinados. Isto representa um *isomorfismo* ψ entre T_pS e $\mathbb{R}^2$ que denotamos por:

$$\mathbf{v} \mapsto \psi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2. \tag{9}$$

LEMA 5.40. *Seja ϕ uma parametrização da superfície $S = \phi(U)$ com $p \in S$. O produto interno (em $\mathbb{R}^3$) entre $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, dois vectores em T_pS é dado por*

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1^t g_\phi \mathbf{u}_2,$$

onde $\mathbf{u}_i = \psi(\mathbf{v}_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\mathbf{u}_1 = (a,b)$ e $\mathbf{u}_2 = (c,d)$. Então:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= (a\phi_s + b\phi_t)\cdot(c\phi_s + d\phi_t) = ac||\phi_s||^2 + (ad+bc)\phi_s\cdot\phi_t + bd||\phi_t||^2 = \\ &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{pmatrix} ||\phi_s||^2 & \phi_s\cdot\phi_t \\ \phi_s\cdot\phi_t & ||\phi_t||^2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1^t g_\phi \mathbf{u}_2,\end{aligned}$$

como pretendido. Em alternativa podiamos ter verificado que o resultado é válido para $\mathbf{v}_1 = \phi_s$ e $\mathbf{v}_2 = \phi_t$ e usar a bilinearidade de ambos os lados da expressão. □

Desta forma, podemos dizer que a interpretação geométrica da primeira forma fundamental é a seguinte:

g representa o *produto interno* no espaço tangente de S.

É por esta razão que a primeira forma fundamental é também conhecida como **métrica em** S.

5.4.1. Derivadas direccionais e curvas em superfícies. A interpretação geométrica da segunda forma fundamental (e do operador curvatura) é um pouco mais elaborada e veremos que envolve o vector normal n em cada ponto p de uma superfície S. Por outro lado, também é importante a relação da curvatura numa superfície S com a curvatura das curvas em S. Para este estudo, necessitamos do conceito de derivada direccional. A definição usual de derivada direccional é a seguinte.

DEFINIÇÃO 5.41. Sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável, a derivada direccional de F em $p \in \mathbb{R}^3$, na direcção de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, é o vector $\mathsf{D}_p F\,\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, onde $\mathsf{D}_p F$ representa a matriz derivada de F em p, e $\mathbf{v}$ é considerado um vector coluna.

Como dissémos, convém relacionar estas derivadas com as superfícies e caminhos nelas.

PROPOSIÇÃO 5.42. *Seja $S = \phi(U)$ uma superfície elementar e $p \in S$. Dada uma função diferenciável $F : S \to \mathbb{R}^3$ (uma função diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^3$ contendo S), e um vector $\mathbf{v} \in T_pS$ temos:*

$$\mathsf{D}_p F\,\mathbf{v} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(F\circ\gamma)(t),$$

onde $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to S$ é um caminho em S que verifica $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

DEMONSTRAÇÃO. Isto segue imediatamente da regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(F\circ\gamma)(t) = \mathsf{D}_{\gamma(0)}F\,\gamma'(0) = \mathsf{D}_p F\,\mathbf{v},$$

como pretendido. □

Notação Uma vez que queremos enfatizar a aplicação linear $\mathsf{D}_p F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e quando o ponto p é subentendido, escrevemos $\mathsf{D}F(\mathbf{v})$ em vez de $\mathsf{D}_p F\,\mathbf{v}$.

EXERCÍCIO 5.43. Mostre que, sendo $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ duas funções diferenciáveis, temos $\nabla(F\cdot G)\cdot\mathbf{v} = \mathsf{D}F(\mathbf{v})\cdot G + F\cdot\mathsf{D}G(\mathbf{v})$, para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

5.4.2. A aplicação de Gauss. Recorde-se que uma superfície elementar é um conjunto da forma $S = \phi(U)$ onde $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ é um mapa regular e injectivo.

DEFINIÇÃO 5.44. Seja $S = \phi(U)$ uma superfície elementar, e S^2 a esfera unitária. Para cada $p = \phi(s_0,t_0) \in S$, definimos

$$n_p := \frac{\phi_s \times \phi_t}{||\phi_s \times \phi_t||},$$

sendo os vectores ϕ_s e ϕ_t calculados em (s_0,t_0). A aplicação $n : S \to S^2$ dada por $p \mapsto n_p$ é chamada a **aplicação de Gauss**.

TEOREMA 5.45. *Seja $S = \phi(U)$ uma superfície elementar, e $p \in S$. Então,*

(1) A aplicação de Gauss é independente da parametrização ϕ

(2) Existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^3$, tal que a aplicação de Gauss pode ser estendida a uma aplicação diferenciável

$$n : W \to S^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. ... □

O próximo lema mostra que a aplicação de Gauss de uma superfície "preserva" o seu espaço tangente.

LEMA 5.46. *Sendo* $\mathbf{v}$ *um vector tangente a* S *em* p *(*$\mathbf{v} \in T_pS$*) temos*

$$\mathrm{D}n(\mathbf{v}) \in T_pS.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta provar que $\mathrm{D}n(\mathbf{v})$ é perpendicular a n. Como $||n||^2 = n \cdot n$ é constante, temos:

$$0 = \nabla(n \cdot n) \cdot \mathbf{v} = \mathrm{D}n(\mathbf{v}) \cdot n + n \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v}) = 2\mathrm{D}n(\mathbf{v}) \cdot n,$$

pelo que $\mathrm{D}n(\mathbf{v}) \perp n$. □

O próximo resultado caracteriza a curvatura de uma *curva* Γ na superfície S, em termos da derivada da aplicação de Gauss $\mathrm{D}n(\mathbf{v})$.

PROPOSIÇÃO 5.47. *Seja* S *uma superfície regular,* $p \in S$ *e* $\mathbf{v} \in T_pS$*, consideremos a curva* $\Gamma = S \cap P$ *obtida intersectando* S *com o plano* P *definido por* n_p *e* $\mathbf{v}$ *(em* p*). Sendo* γ *uma parametrização de* Γ *com* $\gamma(0) = p$*,* $\mathbf{v} = \gamma'(0)$*, temos:*

$$\gamma''(0) \cdot n_p = -\mathbf{v} \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v})$$

Em particular, a curvatura de Γ *em* p *verifica*

$$\kappa = -\mathbf{v} \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v}),$$

sempre que $||\mathbf{v}|| = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Derivando em ordem a s a expressão $\gamma'(s) \cdot n(\gamma(s)) \equiv 0$, e calculando em $s = 0$ temos:

$$0 = \gamma''(s) \cdot n(\gamma(s))|_{s=0} + \gamma'(s) \cdot \frac{d}{ds}|_{s=0} n(\gamma(s)) = \gamma''(0) \cdot n_p + \mathbf{v} \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v}).$$

Notamos agora que a normal n de S em p, *coincide* (a menos de sinal) com a normal n de Γ em p, porque a curva Γ está contida num plano! Assim, no caso em que γ é parametrização métrica ($||\gamma'(s)|| = 1$ pelo que $||\mathbf{v}|| = 1$) temos $\gamma''(0) = \pm\kappa n$, por definição de curvatura κ da curva Γ, e obtemos a fórmula para a curvatura:

$$\kappa = \kappa n \cdot n = \gamma''(0) \cdot n = -\mathbf{v} \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v}),$$

como pretendido. □

5.4.3. Curvaturas principais e seccionais. A proposição anterior relaciona curvatura com a derivada da aplicação de Gauss, em cada direcção dada por $\mathbf{v} \in T_pS$. Estas são chamadas *curvaturas seccionais*.

DEFINIÇÃO 5.48. A curvatura da Proposição 5.47 chama-se **curvatura seccional** de S no ponto $p \in S$, relativa ao plano $(n, \mathbf{v})$, e é dada por $-\mathbf{v} \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v})$ (o seu sinal depende da direcção do vector n em p).

Vamos agora determinar forma quadrática que determina a curvatura, ou seja

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto -\mathbf{v} \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{w}),$$

escrita numa base do espaço tangente T_pS.

PROPOSIÇÃO 5.49. *Sejam* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_pS$*, e* ϕ*uma parametrização de* S *numa vizinhamça de* $p \in S$*. Temos então:*

$$-\mathbf{v}_1 \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^t h_\phi \mathbf{u}_2,$$

onde $\mathbf{u}_i = \psi(\mathbf{v}_i) \in \mathbb{R}^2$*. Em particular* $k = \mathbf{u}^t h_\phi \mathbf{u}$ *é a curvatura seccional na direcção* $\psi^{-1}(\mathbf{u}) \in T_pS$*, se este vector for unitário.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos escrever $\phi_1 := \phi_s$ e $\phi_2 := \phi_t$ por conveniência. Seja $L_{ij} := -\phi_i \cdot D_{\phi_j} n$, $i = 1,2$. Temos apenas que mostrar que os L_{ij} coincidem com os h_{ij}, as entradas da segunda forma fundamental, uma vez que $\psi(\phi_1) = (1,0)$ e $\psi(\phi_2) = (0,1)$, por definição do isomorfismo ψ. Verificam-se as fórmulas:

$$-\phi_i \cdot \mathrm{D}n(\phi_j) = \phi_{ij} \cdot n,$$

onde $\phi_{11} := \phi_{ss}$, $\phi_{12} := \phi_{st}$ e $\phi_{22} := \phi_{tt}$. De facto, por exemplo, a fórmula com $i = 1, j = 2$ resulta de $0 = \frac{d}{dt}(\phi_s \cdot n) = \frac{d}{dt}(\phi_1 \cdot n)$ de forma análoga à demonstração da Proposição 5.47. Assim, temos

$$L_{ij} = -\phi_i \cdot \mathrm{D}n(\phi_j) = \phi_{ij} \cdot n = h_{ij}$$

como pretendido. A fórmula para vectores gerais segue da bilinearidade de ambos os membros. A última frase segue da última frase da Proposição 5.47. □

O seguinte corolário mostra que o operador curvatura, dado por $Q = g^{-1}h$, para um mapa regular ϕ, está intimamente relacionado com a derivada da aplicação de Gauss.

COROLÁRIO 5.50. *O operador curvatura é dado por:*

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad Q\mathbf{u} := -\psi(\mathrm{D}n(\mathbf{v})),$$

em que, sendo $\mathbf{u} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$*, temos* $\mathbf{v} = \psi^{-1}(\mathbf{u}) = a\phi_s + b\phi_t \in T_pS$*, como na equação* (9).

DEMONSTRAÇÃO. Usando a definição $Q = g^{-1}h$ (ou $gQ = h$), de acordo com a Proposição 5.49, e o Lemma 5.40, temos para quaisquer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{u}_1^t g Q \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^t h \mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathrm{D}n(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^t g[\psi(-\mathrm{D}n(\mathbf{v}_2))]$$

sendo $\mathbf{v}_i = \psi^{-1}(\mathbf{u}_i) \in T_pS$. O corolário segue da validade desta equação para quaisquer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$. □

COROLÁRIO 5.51. *Numa base ortonormada, o operador curvatura é simétrico e coincide com a segunda forma fundamental. Assim, as curvaturas principais são sempre números reais.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, numa base ortonormada de T_pS, temos $g = I$, pelo que $Q = h$ e é, portanto, simétrico. A segunda afirmação segue do teorema de diagonalização de matrizes simétricas. □

OBSERVAÇÃO 5.52. Mais geralmente, o operador curvatura é simétrico sempre que temos um mapa conforme, pois nesse caso g é matriz escalar.

Assim, a interpretação geométrica do operador curvatura é a seguinte:

Q é o operador associado à forma quadrática definida
pela derivada da aplicação de Gauss $\mathrm{D}n$.

DEFINIÇÃO 5.53. Seja $p \in S$ um ponto não planar nem umbílico. As **direcções principais** são as direcções em $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ que correspondem aos espaços próprios do operador curvatura Q. Desta forma, as direcções principais são as direcções de curvatura máxima e mínima de curvas (contidas em S) no ponto p.

5.4.4. Classificação dos pontos de uma superfície de acordo com a sua curvatura. As curvaturas principais dão-nos informação sobre a estrutura local da superfície, e permitem uma determinada classificação dos pontos.

PROPOSIÇÃO 5.54. *Sendo* $k_1 \leq k_2$ *as curvaturas principais em* $p \in S$*, as curvaturas seccionais* k*, em* p*, verificam*

$$k_1 \leq k \leq k_2.$$

Reciprocamente, sempre que $k \in [k_1, k_2]$*, existe uma direcção na qual a curvatura seccional é* k*.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideramos um mapa com $g|_p = I_2$ (matriz identidade no ponto p). Sendo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ base ortonormada de T_pS, correspondendo a base de vectores próprios de $Q = h$, Sendo $\mathbf{v} =$

$\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$ unitário, temos:

$$k = \mathbf{v}^t h\mathbf{v} = \mathbf{v}^t Q\mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot (k_1\cos\theta + k_2\sin\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\theta,$$

donde as desigualdades seguem de imediato. Para o recíproco, basta resolver a equação acima em ordem a $\theta \in [0, 2\pi]$. □

DEFINIÇÃO 5.55. Seja S uma superfície regular, $p \in S$ e $k_1 \leq k_2$ as suas curvaturas principais. Diz-se que p é:

- **planar**, se $k_1 = k_2 = 0$
- **umbílico**, se $k_1 = k_2$ mas $k_1 k_2 \neq 0$
- **parabólico**, se $k_1 \neq k_2$ mas $k_1 k_2 = 0$
- **elíptico**, se $k_1 k_2 > 0$
- **hiperbólico**, se $k_1 k_2 < 0$

Segundo a definição acima, os pontos de curvatura escalar K não nula apenas podem ser elípticos, ou hiperbólicos.

EXEMPLO 5.56. (1) O plano. Se considerarmos $\phi(s,t) = \mathbf{v}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ com $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linearmente independentes, vemos que ϕ parametriza um plano. Temos $\phi_s = \mathbf{v}_1$, $\phi_2 = \mathbf{v}_2$ e o vector normal unitário $n = \frac{\phi_s \times \phi_t}{||\phi_s \times \phi_t||} = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_1||\,||\mathbf{v}_2||}$ é uma constante. Assim, o operador curvatura anula-se porque $Q\mathbf{u} = -\psi(\mathrm{D}n(\mathbf{v})) = 0$. Assim, $k_1 = k_2 = 0$ e todos os pontos são planares.
(2) A métrica da esfera em coordenadas geográficas já foi calculada em 5.28:

$$g_\phi = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 s \end{pmatrix}.$$

Sendo a normal unitária igual a $n = -(\cos s\cos t, \cos s\sin t, \sin s)$ e calculando:

$$\begin{aligned} \phi_{ss} &= -R(\cos s\cos t, \cos s\sin t, \sin s) \\ \phi_{st} &= R(\sin s\sin t, -\sin s\cos t, 0) \\ \phi_{tt} &= -R(\cos s\cos t, \cos s\sin t, 0) \end{aligned}$$

Obtemos a segunda forma fundamental:

$$h_\phi = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 s \end{pmatrix},$$

pelo que o operador curvatura é $Q_\phi = g_\phi^{-1} h_\phi = \frac{1}{R} I$ (onde I é a matriz identidade). Assim $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$ e a curvatura de Gauss é $K = \frac{1}{R^2}$. Assim, todos os pontos são umbílicos (e elípticos).

EXERCÍCIO 5.57. Efectue os mesmos cálculos para um elipsóide, parabolóide, hiperbolóide, cone e cilíndro.

DEFINIÇÃO 5.58. Sendo S uma superfície, e k_1, k_2 as curvaturas principais em p, a **curvatura média** em p é

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Temos a seguinte relação simples entre as curvaturas média e escalar.

PROPOSIÇÃO 5.59. *Em cada ponto p de uma superfície temos:*

$$H^2 \geq K.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sendo k_1, k_2 as curvaturas principais, temos

$$H^2 - K = \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 - k_1 k_2 = \frac{k_1^2}{4} + \frac{k_2^2}{4} - \frac{k_1 k_2}{2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

como pretendido. □

5.5. Isometrias e o Teorema de Gauss

A noção de isometria entre superfícies generaliza o conceito de isometrias do plano, e é um dos aspectos essenciais da teoria das superfícies. Começamos por definir isometrias entre mapas regulares.

DEFINIÇÃO 5.60. Sejam $\phi, \phi' : U \to \mathbb{R}^3$ mapas regulares. Dizemos que os mapas ϕ e ϕ' são **isométricos** se as suas primeiras formas fundamentais coincidem: $g_\phi = g_{\phi'}$.

OBSERVAÇÃO 5.61. Na definição acima, considerámos que o espaço dos parâmetros U era o mesmo para ϕ e para ϕ'. Caso tenhamos mapas definidos em regiões diferentes $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ e $\phi' : U' \to \mathbb{R}^3$, para usar esta definição, devemos primeiro considerar um difeomorfismo $\psi : U \to U'$ e verificar se ϕ e $\phi' \circ \psi$ são isométricos, ou seja: $g_\phi = g_{\phi' \circ \psi}$.

A definição de uma isometria em geral é mais difícil devido à necessidade de considerar superfícies que não são elementares (não podem ser parametrizadas por um único mapa). Recorde-se que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é localmente parametrizada por um mapa regular e injectivo.

DEFINIÇÃO 5.62. Sejam S e S' duas superfícies regulares. Dizemos que S e S' são isométricas se existe uma função bijectiva $F : S \to S'$ (chamada isometria) tal que, para qualquer $p \in S$ existe um mapa regular injectivo $\phi : U \to S$ com $p \in \phi(U)$ de forma a que ϕ e $\phi' := F \circ \phi : U \to S'$ são mapas isométricos.

TEOREMA 5.63. *Se $F : S \to S'$ é uma isometria, e γ é uma curva em S, então o seu comprimento é igual ao comprimento da curva imagem $F \circ \gamma$, isto é:*

$$C(\gamma) = C(F \circ \gamma).$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue de um cálculo explícito. □

OBSERVAÇÃO 5.64. Note-se que devido à injectividade, F pode ser obtida através da composição:

$$F = \phi' \circ \phi^{-1},$$

onde $\phi^{-1} : S \to U$ é a função inversa do mapa regular ϕ.

TEOREMA 5.65. *(*Theorema Egregium *de Gauss) A curvatura escalar é um invariante por isometria. Mais precisamente, se $F : S \to S'$ é uma isometria entre superfícies, então $K_p = K_{F(p)}$ para qualquer $p \in S$.*

COROLÁRIO 5.66. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e sejam $S = \phi(U)$ e $S' = \phi'(U)$ duas superfícies elementares. Se $g_\phi = g_{\phi'}$, então $K_p = K_{p'}$ para quaisquer pontos $p \in S$, e $p' = \phi' \circ \phi^{-1}(p)$.*

EXERCÍCIO 5.67. Mostre que a afirmação no Corolário anterior é equivalente à do Teorema 5.65.

A forma mais simples de mostrar o teorema de Gauss é usando o método de Cartan que descrevemos na próxima secção.

5.6. O método de Cartan

O método de Cartan para estudar as superfícies usa de forma essencial a teoria das formas diferenciais em duas variáveis. Esta teoria é revista no Apêndice.

5.6.1. Formas de estrutura e a métrica. Começamos com a definição das formas de estrutura de Cartan.

DEFINIÇÃO 5.68. Seja $S = \phi(U)$ uma superfície elementar e θ o ângulo (orientado) entre ϕ_s e ϕ_t. Definimos as formas de estrutura de Cartan de ϕ como:

$$\begin{aligned} \chi_1 &:= ||\phi_s|| \, ds + ||\phi_t|| \cos\theta \, dt \\ \chi_2 &:= ||\phi_t|| \sin\theta \, dt. \end{aligned}$$

Assim, as formas de estrutura χ_1 e χ_2 são formas diferenciais definidas em $U \subset \mathbb{R}^2$. Note-se que os coeficientes de ambas são, de facto, funções diferenciáveis em U (de classe C^∞).

EXEMPLO 5.69. No caso de um mapa ortogonal, com o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, as formas de estrutura são simplesmente:

$$\chi_1 = ||\phi_s||\, ds, \quad \chi_2 = ||\phi_t||\, dt.$$

Estas formas de estrutura são independentes das direcções concretas dos vectores ϕ_s e ϕ_t e dependem apenas das entradas da matriz g_ϕ.

PROPOSIÇÃO 5.70. *As formas de Cartan χ_1 e χ_2 de uma superfície S dependem apenas da métrica, ou seja, dos coeficientes da primeira forma fundamental de S.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta reescrever as formas de estrutura em termos de $\phi_s \cdot \phi_t$ e das normas $||\phi_s||$ e $||\phi_s||$. De facto, temos:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= ||\phi_s||\, ds + \tfrac{\phi_s \cdot \phi_t}{||\phi_s||}\, dt \\ \chi_2 &= \tfrac{||\phi_s \times \phi_t||}{||\phi_s||}\, dt = \tfrac{\sqrt{1-(\phi_s \cdot \phi_t)^2}}{||\phi_s||}\, dt, \end{aligned} \tag{10}$$

como pedido. □

Reciprocamente, a métrica g_ϕ pode-se reconstruir a partir de χ_1 e χ_2. De facto, considerando a forma quadrática definida por $g = g_\phi$ podemos escrever:

$$g = ||\phi_s||^2 ds^2 + 2\phi_s \cdot \phi_t ds\, dt + ||\phi_t||^2 dt^2.$$

PROPOSIÇÃO 5.71. *Em termos das formas de Cartan, a métrica g pode ser escrita como $\chi_1^2 + \chi_2^2$.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, temos

$$\begin{aligned} \chi_1^2 + \chi_2^2 &= (||\phi_s||\, ds + ||\phi_t|| \cos\theta\, dt)^2 + (||\phi_t|| \sin\theta\, dt)^2 \\ &= ||\phi_s||^2 ds^2 + ||\phi_t||^2 \cos^2\theta\, dt^2 + 2||\phi_s||\, ||\phi_t|| \cos\theta\, ds dt + ||\phi_t||^2 \sin^2\theta\, dt^2 = \\ &= ||\phi_s||^2 ds^2 + 2\phi_s \cdot \phi_t ds\, dt + ||\phi_t||^2 dt^2 = g, \end{aligned}$$

como pretendido. □

Desta forma, podemos dizer que as formas de Cartan "diagonalizam" a métrica. Além disso, temos a seguinte relação entre as formas de Cartan e o "elemento de área".

COROLÁRIO 5.72. *Sendo χ_1 e χ_2 as formas de Cartan do mapa ϕ temos.*

$$\chi_1 \wedge \chi_2 = ||\phi_1 \times \phi_2||\, ds \wedge dt,$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando as fórmulas (10), calculamos explicitamente

$$(||\phi_s||\, ds + \tfrac{\phi_s \cdot \phi_t}{||\phi_s||}\, dt) \wedge (\frac{||\phi_s \times \phi_t||}{||\phi_s||}\, dt) = ||\phi_1 \times \phi_2||\, ds \wedge dt.$$

□

Comparando com a fórmula da área (Definição 5.10), vemos que o produto exterior das formas de Cartan é essencialmente a forma diferencial da área (chamado classicamente, o *elemento de área*). Isto justifica a notação $dA = \chi_1 \wedge \chi_2$.

5.6.2. Triedros de Cartan e as formas de conexão. Vamos agora definir as formas de conexão. Estas surgem através da variação de referenciais apropriados, chamados triedros de Cartan. A expressão inglesa é *moving frame*.

DEFINIÇÃO 5.73. Um triedro ou referencial de Cartan é um referencial $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *ortornormado* em $p \in S$, de tal forma que $T_pS = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

EXEMPLO 5.74. Dada um mapa **ortogonal** ϕ, temos o seguinte referencial de Cartan:

$$\left\{\mathbf{e}_1 = \frac{\phi_s}{||\phi_s||}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\phi_t}{||\phi_t||}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\phi_s \times \phi_t}{||\phi_s||\,||\phi_t||} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\right\}.$$

PROPOSIÇÃO 5.75. *Para qualquer superfície S e $p \in S$, existem triedros de Cartan que variam de forma diferenciável (ie, C^∞) numa vizinhança do ponto p.*

DEMONSTRAÇÃO. É uma consequência da ortogonalização de Gram-Schmidt e de que este processo é diferenciável. Assim, fazemos $\mathbf{e}_1 := \phi_s/||\phi_s||$,

$$\mathbf{e}_2 := \frac{\phi_t - (\phi_t \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{||\phi_t - (\phi_t \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1||},$$

e finalmente $\mathbf{e}_3 := \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. □

LEMA 5.76. *As 1-formas de estrutura da parametrização $\phi : U \to S$ verificam:*

$$d\phi = \phi_s ds + \phi_t dt = \mathbf{e}_1\chi_1 + \mathbf{e}_2\chi_2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Deixa-se como exercício. □

DEFINIÇÃO 5.77. As **1-formas de conexão** ψ_{ij} (relativas ao referencial móvel $\mathbf{e}_i$) são definidas por:

$$d\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \psi_{ij}\,\mathbf{e}_j,$$

onde $i \in \{1,2,3\}$.

LEMA 5.78. *Temos $\psi_{ij} + \psi_{ji} = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta calcular

$$0 = d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{3} \psi_{ij}\,\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k + \sum_{j=1}^{3} \psi_{kj}\,\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \psi_{ik} + \psi_{ki},$$

como queriamos mostrar. □

A definição das formas de conexão não é a forma mais simples de calcular, em problemas concretos. Para isso, precisamos ainda de alguns resultados auxiliares.

PROPOSIÇÃO 5.79. *A relação entre as formas ψ_{i3} e as formas de Cartan, é dada pelo operador curvatura Q, na base ortonormada $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Mais precisamente, escrevendo $Q = h = [h_{ij}]_{i,j=1,2}$, temos:*

$$\begin{bmatrix} \psi_{13} \\ \psi_{23} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Escrevemos, por simplicidade de notação $\phi_1 = \phi_s$, $\phi_{12} = \phi_{st}$, etc. Sendo base ortonormada, o operador curvatura Q coincide com a segunda forma fundamental h. Temos $d\mathbf{e}_3 = \psi_{31}e_1 + \psi_{32}\mathbf{e}_2$, logo $d\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \psi_{31} = -d\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = -d\mathbf{e}_1 \cdot n = -(\phi_{11} \cdot n)ds - (\phi_{12} \cdot n)dt$, onde ϕ é uma parametrização escolhida para ter $\phi_1 = \mathbf{e}_1$, $\phi_2 = \mathbf{e}_2$ ($\chi_1 = (1 + a(s,t))ds$, $\chi_2 = (1 + b(s,t))dt$). Para $\psi_{23} = -\psi_{32}$ é análogo. □

5.6.3. As equações de Cartan. Existem relações entre as formas de estrutura e as de conexão. Estas constituem a base da aplicação do método de Cartan.

TEOREMA 5.80. *(Equações de Cartan) As formas de Cartan verificam:*

$$\begin{aligned} d\chi_i &= \sum_j \psi_{ij} \wedge \chi_j \\ d\psi_{ij} &= \psi_{ik} \wedge \psi_{kj}, \quad k \neq i, j \end{aligned}$$

para todo $i, j \in \{1,2,3\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelas propriedades da derivada exterior temos:

$$0 = d(d\phi) = d(e_1\chi_1 + \mathbf{e}_2\chi_2) = de_1 \wedge \chi_1 + d\mathbf{e}_2 \wedge \chi_2 + e_1 d\chi_1 + \mathbf{e}_2 d\chi_2 = ...\psi_{ij}.$$

Para a segunda fórmula usamos:

$$0 = d(de_i) = ...$$

□

5.6.4. Demonstração do Teorema de Gauss. O método de Cartan resulta numa demonstração bastante curta deste importante teorema. Recorde-se que, para qualquer superfície elementar, temos a seguinte igualdade de formas diferenciais de grau 2:

$$\chi_1 \wedge \chi_2 = ||\phi_1 \times \phi_2||\, ds \wedge dt.$$

TEOREMA 5.81. *A curvatura escalar K de uma superfície verifica*

$$K\,\chi_1 \wedge \chi_2 = -d\psi_{12}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e usando as equações de Cartan (e $\psi_{32} + \psi_{23} = 0$) temos

$$d\psi_{12} = \psi_{13} \wedge \psi_{32} = (a\chi_1 + b\chi_2) \wedge (-c\chi_1 - d\chi_2) = -\det h\ \chi_1 \wedge \chi_2,$$

como pretendido. □

COROLÁRIO 5.82. *[Teorema* Egregium *de Gauss]: A curvatura escalar (curvatura de Gauss) K é invariante por isometria.*

DEMONSTRAÇÃO. Como ψ_{12} depende apenas das funções que entram na definição de χ_1 e χ_2 e estas funções por sua vez apenas dependem da métrica g (Proposição 5.70), vemos que duas superfícies com a mesma primeira forma fundamental, ou seja isométricas (por definição), terão forçosamente a mesma curvatura escalar. □

OBSERVAÇÃO 5.83. Note-se que, ao contrário de ψ_{12}, as formas ψ_{13} e ψ_{23} dependem do terceiro vector do triedro de Cartan (o vector normal $\mathbf{e}_3$) e a direcção deste vector não depende apenas da métrica. Por outras palavras, não há forma de saber a direcção de $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ se conhecermos apenas as entradas da matriz g.

EXEMPLO 5.84. Vamos examinar o caso de um toro (de revolução) parametrizado por

$$\phi(s,t) = ((2+\cos s)\cos t,\, (2+\cos s)\sin t,\, \sin s).$$

Temos

$$\begin{aligned} \phi_s &= (-\sin s\cos t, -\sin s\sin t, \cos s) \\ \phi_t &= (2+\cos s)(-\sin t,\, \cos t,\, 0), \end{aligned}$$

e verifica-se que é uma parametrização ortogonal ($\phi_s \cdot \phi_t = 0$). As normas são $||\phi_s|| = 1$ e $||\phi_t|| = 2 + \cos s$. Assim, a primeira forma fundamental é:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & (2+\cos s)^2 \end{pmatrix}.$$

Para calcular a segunda forma fundamental fazemos:

$$\begin{aligned} \phi_{ss} &= (-\cos s\cos t, -\cos s\sin t, -\sin s) \\ \phi_{st} &= \phi_{21} = (\sin s\sin t, -\sin s\cos t, 0) \\ \phi_{tt} &= (2+\cos s)(-\cos t,\, -\sin t,\, 0), \end{aligned}$$

$$n = \frac{\phi_s \times \phi_t}{||\phi_s||\,||\phi_t||} = (-\cos s\cos t, -\cos s\sin t, -\sin s)$$

e

$$\phi_{ss} \cdot n = 1,\ \phi_{st} \cdot n = 0, \quad \phi_{tt} \cdot n = \cos s(2+\cos s)$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \cos s(2+\cos s) \end{pmatrix},$$

e o operador curvatura tem a forma:

$$Q = g^{-1}h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{(2+\cos s)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \cos s(2+\cos s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{\cos s}{(2+\cos s)} \end{pmatrix},$$

pelo que a curvatura de Gauss é:

$$K = \frac{\cos s}{(2+\cos s)}.$$

Pelo método de Cartan obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= ds \\ \chi_2 &= (2+\cos s)dt. \end{aligned}$$

Fazendo a derivada exterior, escrevendo $\psi_{12} = Ads + Bdt$, e usando as equações de Cartan, obtemos

$$\begin{aligned} d\chi_1 &= 0 = \psi_{12} \wedge \chi_2 = (2+\cos s)Ads \wedge dt \\ d\chi_2 &= -\sin s\, ds \wedge dt = \psi_{21} \wedge \chi_1 = -Bdt \wedge ds = B\, ds \wedge dt, \end{aligned}$$

donde concluímos que $A = 0$ e

$$\psi_{12} = Bdt = -\sin s\, dt.$$

Derivando uma vez mais, e usando a equação de Gauss

$$-d\psi_{12} = \cos s\, ds \wedge dt = K\chi_1 \wedge \chi_2 = K(2+\cos s)ds \wedge dt$$

donde

$$K = \frac{\cos s}{2+\cos s},$$

como pretendido.

5.7. Curvatura total e o teorema de Gauss-Bonnet

No capítulo anterior, vimos que a curvatura total de uma *curva fechada no plano* admitia uma interpretação geométrica como o número de voltas que uma curva dava sobre si mesma. De forma análoga, existe também uma interpretação para a curvatura total de uma superfície, que é mais fácil escrever quando a superfície é compacta e sem bordo, como o caso da esfera ou do toro. Este tipo de superfícies chamam-se fechadas.

O seguinte Teorema é um resultado essencial na relação entre geometria e topologia em dimensão 2. Para o enunciar precisamos de considerar triangulações de uma superfície S. Vamos usar a noção de grafo (não dirigido e simples), e decompor uma superfície arbitrária em várias superfícies todas semelhantes a um disco, ou seja à superfície

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}.$$

DEFINIÇÃO 5.85. Seja S uma superfície regular. Uma triangulação de S é um grafo conexo não dirigido Γ, desenhado na superfície S, que verifica:

(1) as arestas de Γ são curvas regulares simples em S e não se intersectam (excepto em vértices de Γ).

(2) o complemento $S \setminus \Gamma$ é uma união disjunta de superfícies homeomorfas a D, e cada aresta de Γ está no fecho de dois destes discos.

Todas as superfícies regulares admitem triangulações. Embora isto pareça natural, este é um resultado delicado e a sua demonstração sai fora do âmbito destas notas. Dada uma triangulação numa superfície, podemos definir a famosa característica de Euler.

DEFINIÇÃO 5.86. A característica de Euler de uma triangulação $\Gamma \subset S$ é

$$\chi(S,\Gamma) = V - A + F,$$

onde V, A e F são respectivamente o número de vértices, arestas e faces.

TEOREMA 5.87. *[Teorema de Gauss-Bonnet] Seja S uma superfície fechada e triangulada. Então*

$$\int\int_S K = 2\pi\chi(S,\Gamma).$$

Este notável teorema pode ser interpretado da seguinte forma: por um lado, ele diz-nos que a curvatura total só depende da combinatória do grafo Γ desenhado em S, por outro diz-nos que é independente do grafo Γ, uma vez que o integral não envolve a triangulação. Assim, concluímos que a característica de Euler apenas depende da superfície S e é, portanto, o que se chama um invariante topológico.

5.8. Curvas Geodésicas

Uma curva geodésica, ou simplesmente geodésica, é uma curva que minimiza, localmente, a distância entre dois pontos de uma superfície S. Há, no entanto, outra forma de pensar nas geodésicas, quando a superfície está mergulhada em $\mathbb{R}^3$, como é o caso nestas notas: uma geodésica em S pode também ser vista como uma curva Γ que, quando parametrizada por comprimento de arco, tem aceleração que é sempre normal à superfície.

DEFINIÇÃO 5.88. Seja S uma superfície elementar e $\Gamma \subset S$ uma curva regular. Diz-se que Γ é uma geodésica se para uma parametrização métrica γ de Γ temos:

$$\gamma''(t) \parallel n_p, \quad \forall p = \gamma(t) \in S,$$

onde n_p é um vector normal unitário a S em p.

OBSERVAÇÃO 5.89. Sendo a superfície dada por $S = \phi(U)$ para certo mapa regular ϕ, e $\alpha : [a,b] \to U$ uma curva no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, a condição para que $\gamma = \phi \circ \alpha$ seja geodésica escreve-se:

$$\gamma''(s) \cdot \phi_s = \gamma'' \cdot \phi_t = 0$$

sendo ϕ_s e ϕ_t calculadas em $\alpha(t)$.

5.9. Problemas

5.1 Considere a aplicação diferenciável $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(s,t) = (s+t,\, 2s-t,\, e^{s^2-t}+s^3)$. Determine um vector normal a $\phi(\mathbb{R}^2)$, e uma base para o plano tangente a $\phi(\mathbb{R}^2)$, em função de (s,t).

5.2 Sejam $0 < a < b < c \in \mathbb{R}$. Mostre que $\phi(s,t) := (a\sin s\cos t,\, b\sin s\sin t,\, c\cos s)$ é um mapa regular com $s \in]0,\pi[$ e $t \in \mathbb{R}$. Determine a sua imagem em $\mathbb{R}^3$ (usando um polinómio em x,y,z). Mostre que o plano tangente a S nos pontos em que $z = 0$ é paralelo ao eixo dos z.

5.3 Mostre que as funções $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$\phi(s,t) := (s+t,\, s-t,\, 4st), \qquad \psi(s,t) = (s\cosh t,\, s\sinh t,\, s^2),$$

$U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s \neq 0\}$, são mapas regulares que parametrizam subconjuntos de $S = \{(x,y,z) : z = x^2 - y^2\}$. Determine $\phi(\mathbb{R}^2)$ e $\psi(U)$.

5.4 Mostre que o mapa $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\phi(s,t) = \left(\frac{st+1}{st-1}, \frac{s-t}{st-1}, \frac{s+t}{st-1}\right)$$

é uma parametrização do hiperbolóide $x^2+y^2-z^2 = 1$. Verifique que os caminhos $\gamma_1(t) := \phi(t,v)$ e $\gamma_2(t) := \phi(u,t)$ são rectas, para quaisquer $u,v \in \mathbb{R}$ fixos.

5.5 Considere $b \in \mathbb{R}_{>0}$ e o helicóide parametrizado por $\phi(s,t) = (s\cos t,\, s\sin t,\, bt)$, com $s \in]1,3[$ e $t \in]0,\pi[$. Mostre que é um mapa regular e determine a sua área.

5.6 Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 1 - z^2$. Mostre que $S := F^{-1}(0)$ é uma superfície regular e determine um mapa regular que a parametrize. Mostre que o plano tangente a S nos pontos com $z = 0$ é paralelo ao eixo dos z.

5.7 [Superfícies de revolução] Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, com $f(t) > 0$ e $g'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que todas as rectas normais à superfície dada pelo mapa $\phi(s,t) = (f(s)\cos t, f(s)\sin t, g(s))$ intersectam o eixo dos z. Esboce $\phi(]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times\mathbb{R})$ no caso $f(s) = 2 + \cos s$, $g(s) = \sin s$, onde $s \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

5.8 [Superfícies regradas] Seja $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e sejam $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ dois caminhos com $\beta(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Mostre que

$$\phi(s,t) := \alpha(s) + t\beta(s), \quad s \in]a,b[, t \in \mathbb{R},$$

define um mapa diferenciável, e que é regular nos pontos (s,t) onde $\beta(s)$ não é paralelo a $\alpha'(s) + t\beta'(s)$. Verifique que $\phi(I \times \mathbb{R})$ é um cilindro, quando β é constante e α é uma parametrização de circunferência num plano ortogonal a β.

5.9 Seja $h : V \to U$ um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^2$, e seja $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ um mapa regular. Sendo ψ a composição $\psi = \phi \circ h$ (ou seja $\psi(u,v) = \phi(h(u,v)) = \phi(s,t)$), mostre a fórmula de mudança de variável para a área:

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\| |\det Dh|,$$

onde Dh é a matriz $\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{bmatrix}$ e os pontos onde se calculam as derivadas são $(u,v) \in V$, ou $h(u,v) = (s,t) \in U$.

5.10 Indique, justificadamente, se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são ou não superfícies regulares. Caso não sejam, existem subconjuntos que o são?

(a) $S = \{(\cos s, \sin 2s, t) : (s,t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}\}$

(b) $S = \{(x,y,z) : y^2 = x^3\}$

5.11 Determine a primeira forma fundamental para o catenóide, parametrizado por $\phi(s,t) = c(\cosh s \cos t, \cosh s \sin t, s)$, com $c > 0$ fixo e $s, t \in \mathbb{R}$.

5.12 Determine a primeira forma fundamental da superfície parametrizada por

$$\phi(s,t) = \left(s - \frac{s^3}{3} + st^2,\ t - \frac{t^3}{3} + ts^2,\ s^2 - t^2 \right),$$

com $s, t \in \mathbb{R}$.

5.13 Seja $R > 0$ e S a superfície parametrizada por $\phi(u,v) = (u\cos v, u \sin v, 0)$, com $u \in]0,R[$ e $v \in]0, \pi[$. Seja $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\psi(s,t) = \frac{1}{2}(s\cos(2t), s\sin(2t), \sqrt{3}s), \quad s \in]0,R[,\ t \in]0,\pi[.$$

Mostre que as duas formas fundamentais coincidem, e portanto as superfícies são isométricas. Determine uma isometria $h : S \to \tilde{S}$.

5.14 Mostre que para qualquer superfície de revolução, parametrizada como no exercício 7.7, a primeira forma fundamental é uma matriz diagonal.

5.15 Determine a segunda forma fundamental e a curvatura escalar da superfície de Enneper, parametrizada por

$$\phi(s,t) = \left(s - \frac{s^3}{3} + st^2,\ t - \frac{t^3}{3} + ts^2,\ s^2 - t^2 \right),$$

com $s, t \in \mathbb{R}$. Mostre que as curvaturas principais são dadas por $\pm 2(1 + s^2 + t^2)^{-2}$.

5.16 Determine a segunda forma fundamental da parametrização de Mercator, e as respectivas curvaturas principais.

$$\phi(s,t) = \frac{1}{\cosh s}(\cos t, \sin t, \sinh s)$$

5.17 Considere as superfícies S e $\tilde{S}$, parametrizadas por $\phi(s,t) = (s\cos t, s\sin t, \log s)$ e $\psi(s,t) = (s\cos t, s\sin t, t)$ respectivamente (ambas definidas em $U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2, s > 0\}$). Mostre que

S e $\tilde{S}$ têm a mesma curvatura escalar, mas que $\psi \circ \phi^{-1} : S \to \tilde{S}$ não é uma isometria. (Assim, o recíproco do teorema *egregium* de Gauss não é válido).

5.18 Considere a função $\rho(z) = z^2$, para $z > 0$.
   (a) Parametrize a superfície de revolução obtida rodando o gráfico de ρ em torno do eixo dos zz (isto é, introduzindo variáveis x, y com $x^2 + y^2 = \rho^2$).
   (b) Mostre que a sua curvatura de Gauss é dada por $K = 2(1 + 4z^2)^{-3/2}$.

5.19 Mostre que não existe nenhuma superfície cuja primeira e segunda formas fundamentais são dadas por

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.20 Seja C o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Determine uma isometria de C (diferente da identidade) que fixa uma circunferência em C. Existe uma isometria de C cujo conjunto fixo consiste em (apenas) dois pontos?

5.21 Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma isometria, e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície. Mostre que se $F(S) \subset S$ então a restrição de F a S é uma isometria de S.

5.22 Seja $\gamma : [-1, 1] \to S \subset \mathbb{R}^3$ um caminho métrico na superfície S, e $p = \gamma(0) \in S$. Mostre que

$$||\gamma''(0)|| \geq \min\{|k_1|, |k_2|\},$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais de S em p.

5.23 Numa superfície S, mostre que a curvatura média é a média das curvaturas seccionais:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_n(\theta)\, d\theta,$$

onde κ_n é a curvatura seccional num vector que faz ângulo θ com a direcção principal associada a k_1 (o vector próprio do operador curvatura associado a k_1).

5.24 Seja S uma superfície com curvaturas principais $k_1 \leq k_2$, e curvatura escalar K. Mostre ou encontre um contraexemplo para as seguintes afirmações:
   (a) Se k_2 é limitada por $C > 0$, isto é, $|k_2| \leq C$, então qualquer curva $\Gamma \subset S$ tem curvatura $\kappa_\Gamma \leq C$ (como curva no espaço).
   (b) Se $K > 0$, então qualquer curva $\Gamma \subset S$ tem curvatura $\kappa_\Gamma > 0$.
   (c) Se $\tilde{S}$ é outra superfície isométrica a S, com curvaturas principais $\tilde{k}_1 \leq \tilde{k}_2$, então $\tilde{k}_1 = k_1$ e $\tilde{k}_2 = k_2$.

5.25 Seja $\omega = 3ts\, dt + \frac{ds}{t}$ e $\eta = e^t + s^2$. Calcule $d\eta$, $d\omega$, $\omega \wedge \eta$, e $\omega \wedge d\eta$.

5.26 Seja $r > 0$, e S_r o parabolóide (com bordo) parametrizado por $\phi(s, t) = (s \cos t, s \sin t, s^2)$, com $t \in [0, 2\pi]$ e $s \in [0, r]$.
   (a) Verifique que as formas de Cartan são dadas por $\chi_1 = \sqrt{1 + 4s^2}\, ds$ e $\chi_2 = s\, dt$.
   (b) Mostre que $K = \frac{8}{1+4s^2}$.
   (c) Calcule $\int_{S_r} K$ e determine o limite quando $r \to \infty$; interprete o resultado.

5.27 Seja ϕ uma parametrização ortogonal, isto é $\phi_s \cdot \phi_t = 0$, Deduza a fómula para a curvatura escalar (os índices representam derivadas):

$$K = \frac{-1}{\sqrt{\det g}} \left[\left(\frac{f_{2,s}}{f_1} \right)_s + \left(\frac{f_{1,t}}{f_2} \right)_t \right], \quad \text{sendo } \det g = f_1^2 f_2^2, \quad \text{e } f_1 = ||\phi_s||,\ f_2 = ||\phi_t||.$$

5.28 Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ um mapa *conforme*: isto é, a primeira forma fundamental escreve-se como $g = e^\lambda I$, onde I é a matrix identidade, e $\lambda = \lambda(s, t)$ é uma função diferenciavel. Mostre a igualdade:

$$K = \frac{-1}{2e^\lambda} \Delta\lambda,$$

onde Δ é o operador laplaciano usual $\Delta f = f_{ss} + f_{tt}$ [Sugestão: use a fórmula do exercício anterior].

5.29 Considere o semiplano $U = \{(s,t) : \ s,t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ e 1-formas de Cartan, em U, dadas por $\chi_1 = \frac{ds}{t}$, e $\chi_2 = \frac{dt}{s}$. Calcule a 1-forma de conexão ψ_{12} e mostre que a curvatura é constante.

5.30 Seja ω uma forma diferencial de grau 1 em $\mathbb{R}^2$. Mostre que se $d\omega = 0$ então $\omega = dF$ para uma certa função diferenciável $F = F(s,t)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Use este facto para mostrar que, se S é uma superfície cuja forma de conexão ψ_{12} é identicamente nula, então S é isométrica a uma superfície plana. [Sugestão: mostre que, se $d\chi_1 = d\chi_2 = 0$, existe parametrização cuja primeira forma fundamental é a identidade].

Índice

área de um mapa regular, 79
índice de curva no plano, 67
ângulo, 8

antípoda, 31
aplicação de Gauss, 84
argumento, 8

cónica, 13
cónica degenerada, 14
círculo máximo, 31
caminho, 59
caminho fechado, 64
caminho métrico, 63
caminho mensurável, 61
caminho poligonal, 60
caminho regular, 60
caminho simples, 64
característica de Euler, 92
circunferência, 8
colineação, 51
comprimento, 61, 63
comprimento de arco, 63
concatenação, 60
contração, 24
convexo, 12
coordenadas, 7
coordenadas afins, 51
coordenadas homogéneas, 48
coordenadas isotérmicas, 82
curva, 62
curva de Jordan, 73
curva fechada, 64
curva geodésica, 93
curva orientada, 62
curva poligonal, 65
curva regular, 62
curva simples, 64
curvatura de Gauss, 83
curvatura escalar, 83
curvatura média, 87
curvatura orientada, 66
curvatura seccional, 85
curvatura total, 66
curvaturas principais, 83

declive, 10
derivada direccional, 78
direcções principais, 86

discriminante, 15
distância, 8
distância angular, 31
distância esférica, 36

eixo, 7
elípse, 14
Equações de Cartan, 90
esfera de Riemann, 36
esfera unitária, 29
espaço normal, 83
espaço projectivo complexo, 50
espaço tangente, 83
expansão, 24
extremos, 59, 62

factor de escala, 24
forma de conexão, 90
formas de estrutura de Cartan, 88
função argumento, 67
função definidora de uma superfície, 81
função diferenciável, 77

geometria projectiva, 47
grupo especial ortogonal, 19
grupo especial unitário, 40
grupo ortogonal, 19

hipérbole, 14

infinito, 35
inversão, 38
isometria, 15, 88
isometria directa, 18
isometria esférica, 33
isometria hiperbólica, 43
isometria indirecta, 21

linha poligonal, 12

métrica, 84
mapa conforme, 82
mapa ortogonal, 82
mapa ortonormado, 82
mapa regular, 78
mapas isométricos, 88
matriz da cónica, 15
matriz ortogonal, 15

número de rotação, 67, 68

norma, 8, 59

operador curvatura, 83, 90
origem, 7

parábola, 14
parametrização, 9, 62
parametrização métrica, 63
plano Cartesiano, 7
plano complexo estendido, 35
plano hiperbólico, 42
plano homogéneo, 30, 49
plano projectivo real, 47
plano tangente, 79
polígono convexo, 12
ponto elíptico, 87
ponto final, 59
ponto fixo, 19
ponto hiperbólico, 87
ponto inicial, 59
ponto parabólico, 87
ponto planar, 87
ponto regular, 80
ponto singular, 80
ponto umbílico, 87
pontos, 7
posição geral, 52
primeira forma fundamental, 81
produto interno, 8
projecção central, 50
projecção estereográfica, 35
projectividade, 52

quádruplo canónico, 52

razão cruzada, 39
recta, 9
recta esférica, 31
recta hiperbólica, 42
recta homogénea, 30, 47, 49
recta projectiva, 47
recta projectiva complexa, 50
recta projectiva no infinito, 51
recta projectiva real, 50
rectas concorrentes, 11
rectas paralelas, 11, 44, 48
referencial de Cartan, 89
referencial de Frenet, 70
referencial ortonormado, 7
reflexão, 21, 34
reflexão deslizante, 23
reflexão numa circunferência, 26
região, 77
rotação, 18
rotação linear, 18, 33

segmento de recta, 10
segunda forma fundamental, 82
semelhança, 24
semi-recta, 10
superfície elementar, 79
superfície regular, 80
superfícies isométricas, 88

Teorema Egregium de Gauss, 91
torção, 70
tranformações anti-Möbius, 41
transformação de Möbius, 36
transformação geométrica, 15
transformação linear fraccionária, 37
transformações elípticas, 39
transitividade, 21, 38, 43
translação, 18
triângulo esférico, 32
triedro de Cartan, 89

vector, 7
vector binormal, 69
vector derivada, 59
vector normal, 65, 79
vector normal orientado, 65
vector normal unitário, 65
vector tangente, 59
vector velocidade, 59

Bibliografia

[1] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[2] John Roe. *Elementary geometry.* Oxford: Oxford University Press, 1993.

[3] John Stillwell. *Geometry of surfaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992. Corrected reprint of the 1992 original.